Aufg. 1

Digraph $G=(V,E)$ mit $c: E(G) \to \mathbb{R}_+$, zwei Knoten $s,t \in V(G)$.
Kürzester Weg von s nach t eindeutig.

Frage: Kann man den kürzesten von P verschiedenen Weg von s nach t in polynomieller Zeit bestimmen?

Sei $P_{[s,t]} = e_1 e_2 \dots e_k$ der (eindeutige) kürzeste Weg von s nach t.

Sei $G_i = (V, E_i)$, $E_i = E \setminus \{e_i\}$ $i = 1, \dots, k$

FOR i = 1 TO k

Wende Dijkstra auf G_i an.

Sei l_i die Länge des (kürzesten) s-t-Pfades in G_i und P_i der zugeh. Pfad

Behauptung:
P_j mit $l_j = \min_i \{l_i\}$ ist der zweitkürzeste Weg.

Begründung:
Der zweitkürzeste Weg hat mind. eine Kante nicht mit $P_{[s,t]}$ gemeinsam. Die obige Prozedur bestimmt alle kürzesten Wege mit dieser Eigenschaft und wählt dann den mit der geringsten Länge aus.

Laufzeit

Es gilt: $k \leq n$ $\Rightarrow$ Laufzeit: $O(n \cdot n^2) = O(n^3)$

n-mal Dijkstra

Aufg. 1

Digraph G, $r(e) \in [0,1]$ $\forall e$, $s,t \in V$

Ges.: Weg ~~...~~ von s nach t mit max. Zuverlässigkeit

a) Zeige: Das Problem läßt sich auf das kürzeste Wege Problem reduzieren.

Entferne alle Kanten mit $r(e)=0$.

$$\max_{w_{[s,t]}} \prod_{e \in w_{[s,t]}} r(e) \iff \max \ln \prod_{e \in w_{[s,t]}} r(e)$$

da ln str. m. steigend in $(0,1]$

$$\iff \max \sum_{e \in w_{[s,t]}} \ln(r(e))$$

$$\iff \min \sum_{e \in w_{[s,t]}} -\ln(r(e)) \iff \min \sum_{e \in w_{[s,t]}} \ln \frac{1}{r(e)}$$

Also: Definiere $c(e) = \ln \frac{1}{r(e)}$ und suche kürzeste Wege.

1. Mgl.: kürzester Weg wird gefunden $\to$ Weg mit max. Zuverlässigk. (s.o.)

2. Mgl.: sonst

Dann ist der Graph durch das Entfernen der Kanten mit $r(e)=0$ unzush. geworden.

$\to$ Jeder Weg enthält eine Kante mit $r(e)=0$

$\to$ Zuverlässigkeit jedes Wegs ist 0.

Suche beliebigen Weg z.B. mit Breitensuche.

b) ~~Entferne wieder Kanten mit $r(e) \geq 0$~~

Modifiziere Dijkstra wie folgt:

① ... $\ell(v) = 0 \;\; \forall v \neq s$

② ... ... max ....

③ ....

④ FOR $(w \in V(G) \setminus R$ mit $(v,w) \in E(G))$ DO

IF $\ell(w) \leq \ell(v) \cdot r((v,w))$

THEN

$\ell(w) = \ell(v) \cdot r((v,w))$

$p(w) = v_i$

Beweis analog zu Korrektheitsbeweis aus VL.