Krzysztof Marciniak, ITN
Linköpings universitet

Lösningsförslag för tentamen i matematiska modeller i biologi TATM 38

2003-01-17 kl. 14.00—19.00

1. a) $0 = \dot{x} = x\left(r - E - \frac{r}{K}x\right)$ har två lösningar: $\overline{x}_1 = 0$ och $\overline{x}_2 = \left(1 - \frac{E}{r}\right)K$. Stabiliteten avgörs av tecken på derivatan f' av f där f är högerledet av ekvationen, dvs $f(x) = rx\left(1 - \frac{x}{K}\right) - Ex$. Vi har $f'(x) = r - 2rx/K - E$ och $f'(\overline{x}_1) = r - E$ medan $f'(\overline{x}_2) = E - r$. Alltså är $\overline{x}_1$ stabil om $r < E$ och icke-stabil om $r > E$ medan $\overline{x}_2$ är stabil för $r > E$ och instabil för $r < E$, alltså precis tvärtom.

   b) Populationen överlever om den icke-triviala jämvikstpunkten $\overline{x}_2$ är stabil, dvs. om $r > E$.

2. Systemets matris
$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$
har två egenvärden: $\lambda_1 = -1$ och $\lambda_2 = -2$ med motsvarande egenvektorer
$$\overrightarrow{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad , \quad \overrightarrow{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$
så att den allmänna lösningen har formen
$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = C_1 e^{-t} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + C_2 e^{-2t} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$
dvs
$$x(t) = C_1 e^{-t} \quad , \quad y(t) = C_2 e^{-2t}$$
ur vilken får vi lätt att $(x/C_1)^2 = y/C_2$ eller
$$y = \frac{C_2}{C_1^2}\, x^2,$$
vilket tyder på att lösningskurvor är parabler (för $C_1 = 0$ får vi istället linjen $x = 0$). Eftersom båda egenvärden är negativa kommer fasbilden att se ut som på Figur 1. Origo är alltså en stabil knut (node).

3. a) Man inser snabbt att $(0, 0)$ är den enda jämviktspunkten. Genom att dela den första av systemets ekvationer med den andra får vi en differentialekvation
$$\frac{dx_1}{dx_2} = \frac{ax_2}{-bx_1^3 - cx_1}$$
som beskriver lösningskurvor i $x_1 - x_2$ planet. Denna ekvation är separabel:
$$(-bx_1^3 - cx_1)\, dx_1 = ax_2\, dx_2$$

och genom att integrera den en gång får vi systemets rörelseintegral

$$\frac{1}{2}bx_1^4 + cx_1^2 + ax_2^2 = K$$

där $K > 0$ är en integrationskonstant. Detta medför att lösningskurvor är slutna kurvor i planet och att fasbilden ser ut som på Figur 2 (observera riktningen av pilar). Origo är alltså stabil (men ej asymptotisk stabil) jämviktsläge.

b) Systemets Jakobian är

$$J = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -3bx_1^2 - c & 0 \end{pmatrix}$$

med

$$J(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -c & 0 \end{pmatrix}.$$

Det betyder att små avvikelser (perturbationer) $\eta_1 = x_1 - 0$ och $\eta_2 = x_2 - 0$ från origo upfyller ekvationer

$$\dot{\eta}_1 = a\eta_2 \ , \quad \dot{\eta}_2 = -c\eta_1$$

vilket ger $\ddot{\eta}_1 = a\dot{\eta}_2 = -ac\eta_1$ eller $\ddot{\eta}_1 + ac\eta_1 = 0$. Den sista ekvationen (harmonisk oscillator!) har periodiska lösningar med vinkelfrekvensen $\omega = \sqrt{ac} = 2\pi/T$ och alltså perioden T (åtminstone för kurvor nära origo) blir $T = \frac{2\pi}{\sqrt{ac}}$.

c) I fallet när $c = 0$ kan vi fortfarande upprepa analysen ur punkt a) och får ungefär samma fasbild. Den linjäriserade systemet

$$\dot{\eta}_1 = a\eta_2 \ , \quad \dot{\eta}_2 = 0$$

har dock nu lösningar $\eta_1 = Ce^{kt}$, $\eta_2 = k$ som kan ej stämma med fasbilden. Orsaken är att nu Jacobianens determinant är noll. Vi kan alltså inte upprepa samma beräkning som i punkten b).

4. a) Vi inser snabbt att $x_{n+2} = ax_{n+1} + by_{n+1} = ax_{n+1} + b\beta x_n$ eller $x_{n+2} - ax_{n+1} - b\beta x_n = 0$. Den karakteristiska ekvationen $r^2 - ar - b\beta = 0$ har två reella rötter

$$r_{1,2} = \frac{1}{2}\left(a \mp \sqrt{a^2 + 4b\beta}\right)$$

vilket ger den allmänna lösningen:

$$x_n = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n \ , \ \ y_n = \beta\left(C_1 r_1^{(n-1)} + C_2 r_2^{(n-1)}\right) \tag{1}$$

b) Vi ser ur (1) att eftersom r_1 är negativ så kan oscillationer förekoma i systemet.

c) Villkoret $a + \beta b \neq 1$ medför att det finns enbart en jämviktspunkt: origo $(0,0)$. Origo är stabil enbart om $|r_1| < 1$ och $|r_2| < 1$. Eftersom $|r_1| < |r_2|$ ger dessa villkor tillsammans att $|r_2| < 1$ dvs. att $a + \sqrt{a^2 + 4\beta b} < 2$. Detta ger snabbt att origo är stabil om $a < 2$ och $a + \beta b < 1$.

5. a) **Steg 1 och 2:** Vi letar efter lösningar av separerad typ och sätter alltså in ansatzen $P(x,t) = X(x)T(t)$ in i PDE, vilket leder snabbt till ekvationen

$$\frac{T'}{T} = D\frac{X''}{X} + \alpha$$

där VL beror endast på t medan HL beror enbart på x. Således, båda uttrycken måste vara lika med en konstant k och vi får två (kopplade via separationskonstanten) ODEs:

$$T' = kT \ , \quad X'' + \frac{\alpha - k}{D} X = 0 \tag{2}$$

vilkas lösningar beror på konstanten $\alpha - k$:s tecken.

Fall 1: $k > \alpha$. I detta fall $\frac{\alpha-k}{D} < 0$ och således kan vi beteckna den med $-a^2$, där alltså $a = \sqrt{\frac{k-\alpha}{D}}$. Detta ger $k = \alpha + Da^2$. Den allmänna lösningen till (2) blir

$$P(x,t) = e^{\left(\alpha + Da^2\right)t}\left(Ae^{ax} + Be^{-ax}\right).$$

Det första randvillkoret $0 = P(0,t)$ leder till att $A + B = 0$ eller att $B = -A$. Det andra villkoret $0 = P(L,t)$ ger oss då $e^{aL} - e^{-aL} = 0$ eller $\sinh(aL) = 0$ vilket ger $a = 0$. Men vi antog att $a \neq 0$. Vi fick alltså motsägelse: det går inte att upfylla randvillkoren med om $k > \alpha$.

Fall 2: Antagandet $k = \alpha$ ger ekvationen $X'' = 0$ som är igen oförenlig med randvillkoren.

Fall 3: Vi ser alltså att $k < \alpha$, annars får vi ingen lösning. I detta fall betecknar vi $\frac{\alpha-k}{D} > 0$ med ω^2. Vi har då $k = \alpha - \omega^2 D$ och ekvationerna (2) antar formen:

$$T' = (\alpha - \omega^2 D)T \ , \ X'' + \omega^2 X = 0$$

med den allmänna lösningen

$$P(x,t) = e^{\left(\alpha - \omega^2 D\right)t}\left(A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x)\right).$$

Det första randvillkoret $0 = P(0,t)$ ger nu att $A = 0$ medan det andra villkoret $0 = P(L,t)$ ger att $\sin(\omega L) = 0$ vilket är möjligt enbart om $\omega L = n\pi$ i.e. om $\omega_n = \frac{n\pi}{L}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ (negativa n samt $n = 0$ bidrar ej till den slutgiltiga lösningen - varför?). Vi fick alltså en uppsättning av fundamentala lösningar

$$P_n(x,t) = e^{\left(\alpha - \omega^2 D\right)t}\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \ , \ n = 1, 2, 3, \ldots$$

Steg 3: Vi letar efter lösningen av hela IBVP på formen:

$$P(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{\left(\alpha - \omega^2 D\right)t}\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \tag{3}$$

där vi kräver att uttrycket (3) upfyller även begynnelsevillkoret:

$$\sin\left(\frac{7\pi x}{L}\right) = P(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

ur vilket vi får att $A_7 = 1$ medan resten av koefficienter A_n är lika med noll. Den slutgiltiga lösningen blir

$$P(x,t) = e^{\left(\alpha - \left(\frac{7\pi}{L}\right)^2 D\right)t} \sin\left(\frac{7\pi x}{L}\right).$$

b) Vi ser att avvikelsen P kommer att överleva om $\alpha > \left(\frac{7\pi}{L}\right)^2 D$.

c) Ur detta ser vi att liten D, stor L samt stor α bidrar till att avvikelsen överlever.

6. a) Vi definerar $R_1(c_1, c_2) = ec_1^2 c_2 - \mu c_1$, $R_2(c_1, c_2) = e_0 - ec_1^2 c_2$. Genom att lösa systemet $R_1(\bar{c}_1, \bar{c}_2) = 0$, $R_2(\bar{c}_1, \bar{c}_2) = 0$ får vi det enda homogena jämviktsläget $(\bar{c}_1, \bar{c}_2) = \left(\frac{e_0}{\mu}, \frac{\mu^2}{ee_0}\right)$.

Betrakta Meinhardt reaktion-diffusion systemet

$$\frac{\partial c_1}{\partial t} = D_1 \frac{\partial^2 c_1}{\partial x^2} + ec_1^2 c_2 - \mu c_1 \ , \quad \frac{\partial c_2}{\partial t} = D_2 \frac{\partial^2 c_2}{\partial x^2} + e_0 - ec_1^2 c_2 \tag{4}$$

där alla konstanter e, e_0, μ, D_1 och $D_2 > 0$.

b) Jacobimatrisen av systemet blir

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2ec_1c_2 - \mu & ec_1^2 \\ -2ec_1c_2 & -ec_1^2 \end{pmatrix}\Bigg|_{(\bar{c}_1, \bar{c}_2)} = \begin{pmatrix} \mu & ee_0^2/\mu^2 \\ -2\mu & -ee_0^2/\mu^2 \end{pmatrix}$$

och alltså ämnet 1 är aktivator ($a_{11} = \mu > 0$), ämnet 2 är inhibitor ($a_{22} = -ee_0^2/\mu^2 < 0$) medan den kemiska reaktionen är av 'positive-feedback' typen.

c) Kemiska reaktionen är stabil om $\mathrm{Tr}(A) < 0$ och $\det(A) > 0$. Det andra villkoret är alltid uppfylld ty $\det(A) = ee_0^2/\mu > 0$. Det första villkoret har formen $\mu^3 < ee_0^2$ och om den är uppfylld är alltså reaktionen stabil.

d) Kravet $a_{11}D_2 + a_{22}D_1 > 0$ kan uppfyllas genom att välja stor D_2 och liten D_1. Detsamma gäller det andra kravet:

$$a_{11}D_2 + a_{22}D_1 = \mu D_2 - \frac{ee_0^2}{\mu^2} D_1 > 2\sqrt{D_1 D_2}(\det A)^{1/2} = 2\sqrt{D_1 D_2} \cdot e_0 \sqrt{\frac{e}{\mu}}$$

Genom att öka D_2 och minska D_1 på sådant sätt att $D_1 D_2$ bevaras konstant kan man så småningom uppfylla olikheten, vilket leder till diffusion-driven instabilitet.