

Tentamen i matematiska modeller i biologi TATM 38

2003-01-17 kl. 14.00—19.00

Tillåtna hjälpmedel: Physics Handbook for Scientists and Engineers och TEFYMA tabeller.

Jour: Claes Waksjö, MAI, ankn. 2370

Varje uppgift bedöms med 0-3p. För godkänt krävs minst 8p samt minst 2 uppgifter bedömda 2p eller högre.

1. En logistisk ekvation med en fisketerm ges av

$$\frac{dx}{dt} = rx \left(1 - \frac{x}{K}\right) - Ex \quad \text{där } r, E, K > 0$$

- Bestäm alla jämviktpunkter och avgör deras stabilitet.
- Vilken (vilka) villkor måste konstanten E uppfylla för att populationen skulle kunna överleva?

2. Ange den allmänna lösningen av systemet

$$\frac{dx}{dt} = -x, \quad \frac{dy}{dt} = -2y.$$

på en reell form. Rita systemets fasporträtt genom att eliminera tiden t ur allmänna lösningen. Avgör stabilitet av $(0, 0)$.

3. Betrakta följande systemet:

$$\frac{dx_1}{dt} = ax_2, \quad \frac{dx_2}{dt} = -bx_1^3 - cx_1,$$

där a, b och c är > 0 .

- Ange en exakt form av lösningskurvor genom att hitta en rörelseintegral av systemet. Rita systemets fasbild och härav avgör jämviktpunktens stabilitet.
 - Lösningarna är slutna kurvor runt jämviktpunkten. Försök att beräkna deras period genom att linjärisera systemet runt denna punkt.
 - Antag att $c = 0$ nu. Kan du upprepa analys a)-b) i detta fall? Förklara varför.
4. a) Lös följande systemet av differensekvationer:

$$x_{n+1} = ax_n + by_n, \quad y_{n+1} = \beta x_n$$

där a, b och $\beta > 0$ och där $a + \beta b \neq 1$.

- Kommer systemet att utveckla oscillationer?
- Avgör jämviktpunktens stabilitet.

5. En planktonpopulation på intervallet $[0, L]$ beskrivs av ekvationen

$$\frac{\partial P}{\partial t} = D \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \alpha P, \quad D \text{ och } \alpha > 0 \quad (1)$$

där $P = P(x, t)$ beskriver avvikelsen av planktonens densitet från ett visst jämviktsläge. Vid $t = 0$ distributionen ges av $P(x, 0) = \sin(7\pi x/L)$. Planktonens densitet vid ändpunkter är noll.

- Ange $P(x, t)$ genom att separera variabler i (1) *direkt* utan att göra någon variablebyte.
- För vilka värden på α kommer avvikelsen att överleva?
- Vilka faktorer är bidragande till att avvikelsen överlever?

6. Betrakta Meinhardt reaktion-diffusion systemet

$$\frac{\partial c_1}{\partial t} = D_1 \frac{\partial^2 c_1}{\partial x^2} + e c_1^2 c_2 - \mu c_1, \quad \frac{\partial c_2}{\partial t} = D_2 \frac{\partial^2 c_2}{\partial x^2} + e_0 - e c_1^2 c_2 \quad (2)$$

där alla konstanter e, e_0, μ, D_1 och $D_2 > 0$.

- ange det homogena jämviktstillståndet
- Ange vilket ämne är aktivator och vilket inhibitor och vilken typ av reaktionen beskrivs av (2).
- För vilka värden på parametrar e, e_0, μ, D_1, D_2 är motsvarande kemiska reaktionen stabil?
- Kan man välja parametrar e, e_0, μ, D_1 och D_2 så att diffusion-driven instabilitet uppstår i systemet?