Krzysztof Marciniak, ITN
Linköpings universitet

Lösningsförslag för tentamen i matematiska modeller i biologi TATM 38

2002-10-23 kl. 14.00—19.00

1. a) Ur ekvationen $f(x) = rx\left(1 - \frac{x}{K}\right) - Ex^2 = 0$ får vi två jämviktslägen:

$$\bar{x}_1 = 0 \quad \text{och} \quad \bar{x}_2 = \frac{rk}{r + Ek} > 0$$

$f'(x) = r - \frac{2rx}{K} - 2Ex = r - 2x\left(\frac{r+Ek}{k}\right)$ så att $f'(\bar{x}_1) = r > 0$ och alltså $\bar{x}_1$ är alltid instabil, medan $f'(\bar{x}_2) = -r < 0$ vilket ger att $\bar{x}_2$ är alltid stabil.

b) Se Figur 1.

c) Enligt Figur 1 är bärandekapaciteten lika med $\bar{x}_2$ty om populationen överstiger $\bar{x}_2$kommer den att minska sukcessivt till nivån $\bar{x}_2$och om populationen vid någon tidpunkt ligger under $\bar{x}_2$ då kommer den att stiga mot $\bar{x}_2$.

2. Systemets matris

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{bmatrix}$$

har två komplex konjugerade egenvärden $\lambda_{1,2} = 0 \pm i\omega$ med motsvarande egenvektorer:

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}$$

så att den allmänna lösningen av systemet ges av

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = e^{0t}\left(C_1\vec{v}_1e^{i\omega t} + C_2\vec{v}_2e{-}^{i\omega t}\right) = A\begin{pmatrix} -\sin(\omega t) \\ \cos(\omega t) \end{pmatrix} + B\begin{pmatrix} \cos(\omega t) \\ \sin(\omega t) \end{pmatrix}$$

där $A = C_1 + C_2$ och $B = i(C_1 - C_2)$. Ur detta får vi snabbt att $x^2(t) + y^2(t) = A^2 + B^2$ vilket tyder på att lösningskurvor är cirklar med mittpunkten i origo och med radius $\sqrt{A^2 + B^2}$ beroende på begynnelsevillkoret. Origo är alltså en stabil, men ej asymptotisk stabil, jämviktspunkt.

3. a) Systemet beskriver situtationen där byte (N_1) för att kunna överleva migrerar från området (som är fylld med rovdjur N_2) med en konstant hastighet s. Rovdjur kan ej överleva utan byte och vid deras frånvaro dör de ut med ratio c medan byte klarar sig ensamma i miljön utan rovdjur (och då förökar de sig med ratio r). De båda produkttermer är de vanliga Lotka-Volterra termer som beskriver hur frekvensen av möten mellan rovdjur och byte (som är proportionellt mot produkten av N_1 och N_2) påverkar tillväxten av båda arter.

b) På grund av sambandet $s/r = c/\beta$ har vi bara en jämviktspunkt $(s/r, 0) = (c/\beta, 0)$. Jacobimatrisen av systemet

$$J = \begin{pmatrix} r - \alpha N_2 & -\alpha N_1 \\ \beta N_2 & -c + \beta N_1 \end{pmatrix}$$

beräknad vid jämviktspunkten $(s/r, 0) = (c/\beta, 0)$ är

$$J(s/r, 0) = \begin{pmatrix} r & -\alpha s/r \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

så att $Tr\ J(s/r, 0) = r > 0$ och punkten är icke-stabil.

c) N_1-nullclines ges av $rN_1 - \alpha N_1 N_2 - s = 0$ vilket har bara en lösning: hyperbeln $N_2 = \frac{r}{\alpha} - \frac{s}{\alpha}\frac{1}{N_1}$. N_2-nullclines är lösningar av $-cN_2 + \beta N_1 N_2 = 0$ vilket har två lösningar: $N_2 = 0$ eller $N_1 = c/\beta$. Alla tre nullclines skär i jämviktspunkten. Vidare, $dN_1/dt|_{N_2=0} = rN_1 - s$ är positiv till höger om jämviktspunkten och negativ till vänster om denna, vilket ger att systemets vektorfält pekar åt höger till höger om jämviktspunkten och åt vänster till vänster av jämviktspunkten. Allt detta plus liknande analys av riktningen av vektorfältet ger fasbilden enligt Figur 2.

d) Ur fasbilden ser man att alla trajektorier utom de som börjar på linjen $N_2 = 0$ till höger om jämviktspunkten kommer inom ett ändlig (varför?) tid att gå genom N_2-axeln vilket betyder att området blir fri från byte (som äntligen dör ut, blir uppättna av rovdjur eller migrerar till säkrare ställen).

4. Eftersom $y = f(x)$ och $x = f(y)$ så har vi att $f(f(x) = x$ dvs. punkten x är jämviktspunkten för den sammansätta funktionen $g = f \circ f$ (samma sak kan sägas om punkten y). Stabilitet av 2-cykl (x, y) är samma som stabilitet av x vid avbildningen $g = f \circ f$ (varför?). Stabilitetskriteriet har alltså formen $|g'(x)| < 1$ som enligt kedjeregeln antar formen $|f'(f(x))f'(x)| < 1$ vilket avslutar beviset, ty $y = f(x)$.

5. Variablebyte $S(x, t) = e^{\beta t} w(x, t)$ förvandlar vår IBVP till följande problem:

$$\begin{cases} \text{PDE:} & w_t = D w_{xx} \\ \text{BCs:} & w(0, t) = w(L, t) = 0 \\ \text{IC:} & w(x, 0) = \sin(2\pi x/L) \end{cases} \tag{1}$$

Steg 1: Vi letar efter lösningar av separerad typ och sätter alltså in ansatzen $w(x, t) = X(x)T(t)$ in i PDE, vilket leder snabbt till ekvationen

$$\frac{T'}{DT} = \frac{X''}{X}$$

där VL beror endast på t medan HL beror enbart på x. Således, båda uttrycken måste vara lika med en (negativ, annars kommer $T(t)$ stiga oinskränkt) konstant $-\lambda^2$. Detta leder till två (kopplade via separationskonstanten λ) ODEs

$$T' + D\lambda^2 T = 0\ , \quad X'' + \lambda^2 X = 0,$$

varav första har den allmänna lösningen $T(t) = Ce^{-D\lambda^2 t}$ och den andra $X(t) = A\cos(\lambda x) + B\sin(\lambda x)$. Således, elementära separerade lösningar har formen

$$w(x,t) = e^{-D\lambda^2 t}\left(A\cos(\lambda x) + B\sin(\lambda x)\right) \tag{2}$$

Steg 2: Vi sätter in (2) i randvillkoren BCs. Kravet $w(0,t) = 0$ leder till $A = 0$ vilket uttnytjas i det andra kravet $w(L,t) = 0$ som då antar formen $\sin(\lambda L) = 0$. Detta leder till 'kvantifiering' av vågnummer λ:

$$\lambda_n = \frac{n\pi}{L} \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

(negativa n insätta i (2) ger inga nya bidrag, likaså $n = 0$). Vi får alltså en följd av fundamentala lösningar på formen

$$w_n(x,t) = e^{-D\lambda_n^2 t}\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Steg 3: Vi letar efter lösningen till (1) på formen

$$w(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-D\lambda_n^2 t}\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right). \tag{3}$$

Uttrycket (3) satisferar både PDE och BCs för (nästan) varje godtycklig val av konstanter A_n. Sista kravet (begynnelsevillkoret IC) ger oss att

$$\sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right) = w(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

leder snabbt till att $A_2 = 1$ medan resten av A_n är lika med 0. Således, lösningen till det ursprungliga problemet antar formen

$$S(x,t) = e^{\left(\beta - D\left(\frac{2\pi}{L}\right)^2\right)t}\sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right). \tag{4}$$

b) Från (4) ser man att planktonpopulationen dör ut om $\beta < D\frac{4\pi^2}{L^2}$.

c) Faktorer som bidrar till att populationen dör ut är: stor diffusionskoefficient D, liten L samt liten β.

6. a) Villkor $\frac{\partial c_i}{\partial t} = 0$, $\frac{\partial c_i}{\partial x} = 0$ medför att $R_1(\bar{c}_1, \bar{c}_2) = 0$ och $R_2(\bar{c}_1, \bar{c}_2) = 0$ där $R_1(c_1, c_2) = c_1^2 c_2 - c_1 + b$ och $R_2(c_1, c_2) = -c_1^2 c_2 + a$. Detta leder till ett följande homogent jämviktstillstånd:

$$(\bar{c}_1, \bar{c}_2) = \left(a + b, \frac{a}{(a+b)^2}\right)$$

som är alltid biologisk meningsful ty a och b antas vara positiva.

b) Jacobimatrisen A av systemet beräknad vid $(\overline{c}_1, \overline{c}_2)$ ges av

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial R_1}{\partial c_1} & \frac{\partial R_1}{\partial c_2} \\ \frac{\partial R_2}{\partial c_1} & \frac{\partial R_2}{\partial c_2} \end{bmatrix}\Bigg|_{(\overline{c}_1, \overline{c}_2)} = \begin{bmatrix} \frac{a-b}{a+b} & (a+b)^2 \\ -\frac{2a}{a+b} & -(a+b)^2 \end{bmatrix}$$

och eftersom $\det A = (a+b)^2 > 0$ själva reaktionen blir stabil om $Tr(A) < 0$, dvs. om $a-b < (a+b)^3$. Diffusion-driven instabilitet uppstår om $a_{11}D_2 + a_{22}D_1 > 2\sqrt{D_1 D_2}(\det A)^{1/2}$ vilket i vårt fall läses som

$$\frac{a-b}{a+b} D_2 - (a+b)^2 D_1 > 2\sqrt{D_1 D_2}(a+b)$$

Denna olikhet kan upfyllas t.ex. genom att öka D_2 och samtidigt minska D_1 så att $D_1 D_2$ blir konstant vilket innebär att diffusion-driven instabilitet kan uppstå i systemet.

c) Man inser snabbt att eftersom $a_{11}D_2 + a_{22}D_1 > 0$ så är $a > b$ och alltså $a - b > 0$ dvs. $a_{11} > 0$ medan $a_{22} = -(a+b)^2 < 0$. Detta medför att c_1 är aktivator medan c_2 är inhibitor.

d) Teckenuppsättning av element i matrisen A indikerar att reaktionen är av typ 'positive feedback'.