Krzysztof Marciniak, ITN
Linköpings universitet
tel. 011-363320
e-mail: krzma@itn.liu.se

Lösningsförslag för tentamen i matematiska modeller i biologi TATM 38

2004-01-15 kl. 14—19

1. a) Ekvationen är separabel - variablerna separeras genom

$$\frac{dx}{x(1-x^2)} = a\,dt$$

och ledvis integration leder till

$$\int \frac{dx}{x(1-x^2)} = \int a\,dt = at + C.$$

Integralen på vänster sida kan lätt integreras genom partiellbråksuppdelning, ty

$$\frac{1}{x(1-x^2)} = \frac{1}{x} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-x} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+x},$$

vilket leder till följande implicita form av den allmänna lösningen

$$\ln\left(\frac{|x|}{\sqrt{|1-x^2|}}\right) = at + C,$$

och efter ett par enkla algebraiska operationer får vi den allmänna lösningen på formen:

$$x(t) = \pm\frac{1}{(1+De^{-2at})^{1/2}}$$

där $D = \pm e^{-2C} \neq 0$.

b) För $x(0) = 1$ får vi naturligtvis $x(t) = 1$ medan för $x(0) = 0$ får vi $x(t) = 0$. Man behöver ej den allmänna lösningen för att se detta, ty både för $x = 0$ och $x = 1$ försvinner HL av diffekvationen och dx/dt är då 0.

c) Det finns tre jämviktspunkter: $x_1 = 1$, $x_2 = 0$ och $x_3 = -1$. Vi har $f(x) = ax(1-x^2)$ med $f'(x) = a(1-3x^2)$. Det är lätt att kolla att $f'(x_2) = a > 0$ medan $f'(x_1) = f'(x_3) = -2a < 0$. Således är både x_1 och x_3 stabila medan x_2 är instabil.

2. Systemet har följande matris

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

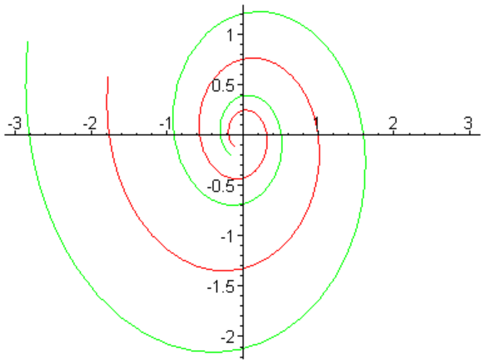

Figure 1:

som har två komplexkonjugerade egenvärden $\lambda_{1,2} = -1 \pm 2i$ med motsvarande två komplexa egenvektorer

$$\overrightarrow{V}_{1,2} = \begin{pmatrix} \pm i \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Den allmänna lösningen blir alltså

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} &= C_1 \overrightarrow{V}_1 e^{(-1+2i)t} + C_2 \overrightarrow{V}_2 e^{(-1-2i)t} = \\ &= e^{-t} \left[C_1 \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} (\cos(2t) + i \sin(2t)) + C_2 \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix} (\cos(2t) - i \sin(2t)) \right] \end{aligned}$$

och efter insättningen $D_1 = i\,(C_1 - C_2)$, $D_2 = C_1 + C_2$ får vi den allmänna lösningen på reell form:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = e^{-t} \begin{pmatrix} D_1 \cos(2t) - D_2 \sin(2t) \\ D_2 \cos(2t) + D_1 \sin(2t) \end{pmatrix}$$

ur vilken kan dessutom lätt härledas att $x^2(t) + y^2(t) = (D_1^2 + D_2^2)e^{-2t}$. Detta tyder på att fasbilden består av inåtgående spiraler, som ser ut som på Figur 1. Eftersom $\det(A) = 5 \neq 0$, är origo $(0,0)$ den enda jämviktspunkten. Den är av typen stabil spiral, ty $\mathrm{Re}(\lambda_i) = -1 < 0$ eller därför att $\mathrm{Tr}(A) = -2 < 0$, $\det(A) > 0$ och diskriminanten av A är lika med $-16 < 0$.

3. Ur första ekvationen erhåller man $y_n = 2x_n - x_{n+1}$ vilket insatt i den andra ekvationen ger följande andragradsekvation för x_n:

$$x_{n+2} - 4x_{n+1} + 8x_n = 0,$$

med karakteristiska ekvationen $\lambda^2 - 4\lambda + 6 = 0$ som har två komplexkonjugerade rötter $\lambda_{1,2} = 2(1 \pm i)$. Den allmänna lösningen blir således

$$\begin{aligned} x_n &= C_1\lambda_1^n + C_2\lambda_2^n = 2^n \left(C_1(1+i)^n + C_2(1-i)^n \right) \\ y_n &= 2x_n - x_{n+1} = -2iC_1\lambda_1^n + 2iC_2\lambda_2^n = \\ &= 2^{n+1}\, i \left(-C_1(1+i)^n + C_2(1-i)^n \right). \end{aligned}$$

Den reella formen av lösningen kan lätt hittas ur ovanstående formler genom att uttnyttja att $1 \pm i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} \pm i\sin\frac{\pi}{4}\right)$. Resultatet blir

$$\begin{aligned} x_n &= 2^{3n/2}\left[D_1\cos\frac{n\pi}{4} + D_2\sin\frac{n\pi}{4}\right] \\ y_n &= 2^{(3n+2)/2}\left[D_1\sin\frac{n\pi}{4} - D_2\cos\frac{n\pi}{4}\right], \end{aligned}$$

där $D_1 = C_1 + C_2$, $D_2 = i(C_1 - C_2)$. Insättning av begynnelsevillkoret ger $D_1 = 1$, $D_2 = 0$, vilket ger lösningen

$$x_n = 2^{3n/2}\cos\frac{n\pi}{4}, \quad y_n = 2^{(3n+2)/2}\sin\frac{n\pi}{4}$$

som på $x - y$ planet har formen av en utåtgående spiral orienterad moturs.

4. Ekvationen kan skrivas om som

$$x_{n+1} = \frac{a x_n^2}{x_n^2 + 1} \equiv f(x_n)$$

och dess jämviktspunkter x måste uppfylla ekvationen $x = f(x)$ eller $x(x^2 - ax + 1) = 0$ som har tre algebraiska rötter: $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{1}{2}\left(a + \sqrt{a^2-4}\right)$, $x_3 = \frac{1}{2}\left(a - \sqrt{a^2-4}\right)$. Vi har här tre fall:

a) Om $a < 2$ då har vi enbart en reell jämviktspunkt $x_1 = 0$. Vidare,$|f'(x_1)| = 0 < 1$ d.v.s. punkten är stabil.

b) Om $a = 2$ har vi två rötter: $x_1 = 0$ och och $x_{2,3} = \frac{a}{2} = 1$. Punkten x_1 är fortfarande stabil, medan $|f'(x_{2,3})| = 1$ och punktens stabilitet kan ej bestämmas genom linearisering.

c) Om $a > 2$ har vi tre reella jämviktspunkter x_1 , x_2 och x_3. Punkten x_1 är förstås stabil medan x_2 är stabil och x_3 instabil, ty

$$\left|f'(x_2)\right| = \frac{4}{a^2\left(1 + \sqrt{1 - \frac{4}{a^2}}\right)} < 1 \text{ och } \left|f'(x_3)\right| = \frac{4}{a^2\left(1 - \sqrt{1 - \frac{4}{a^2}}\right)} = \left(1 + \sqrt{1 - \frac{4}{a^2}}\right) > 1.$$

5. Variabelbytet

$$y(x) = \frac{x-a}{b-a}$$

förvandlar vår IBVP till följande IBVP för $w(y(x),t) = u(x,t)$

$$\begin{cases} \text{PDE:} & w_t = \frac{1}{(b-a)^2}w_{yy}, \;\; 0 < y < 1, \;\; 0 < t < \infty \\ \text{BCs:} & w(0,t) = w_y(0,t) = 0, \quad 0 < t < \infty \\ \text{IC:} & w(y,0) = \sin(\pi y), \quad 0 < y < 1 \end{cases} \tag{1}$$

(termen $1/(b-a)^2$ uppstår ty $w_{xx} = 1/(b-a)^2 w_{yy}$ p.g.a. kedjeregeln) vilket kan lätt lösas med variabelseparation. Resultatet blir

$$w(y,t) = e^{-(\pi\alpha)^2 t}\sin(\pi y), \quad \text{där } \alpha = \frac{1}{(b-a)^2}$$

eller i ursprungliga variabler:

$$u(x,t) = e^{-(\pi\alpha)^2 t} \sin\left(\pi \frac{x-a}{b-a}\right)$$

6. Se boken, sid. 218-221 och uppgiften 10 sid. 258.