Krzysztof Marciniak, ITN
Linköpings universitet
tel. 011-363320
e-mail: krzma@itn.liu.se

Lösningsförslag för tentamen i matematiska modeller i biologi TATM 38

2003-08-23 kl. 14.00—19.00

1. a) $0 = \dot{x} = (x-a)(x-b)$ har två lösningar: $\overline{x}_1 = a$ och $\overline{x}_2 = b$. Stabiliteten avgörs av tecken på derivatan f' av f där f är högerledet av ekvationen, dvs $f(x) = (x-a)(x-b)$. Vi har $f'(x) = 2x - (a+b)$ och $f'(\overline{x}_1) = a - b > 0$ medan $f'(\overline{x}_2) = b - a < 0$. Alltså är $\overline{x}_1$ instabil medan $\overline{x}_2$ är stabil.

   b) Ekvationen är separabel. Variablerna separeras enligt följande

$$\frac{dx}{(x-a)(x-b)} = dt$$

   vilket kan lätt integreras genom att partialbråksuppdela vänsterledet. Resultatet blir

$$\ln\left|\frac{x-a}{x-b}\right| = (a-b)(t-t_0) \equiv K(t)$$

   där t_0 är en integrationskonstant. Detta kan lösas med avseende på $x(t)$, vilket ger

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{ae^{-K(t)} - b}{e^{-K(t)} - 1} \quad \text{om } x(0) > a \text{ eller } x(0) < b \\ x(t) &= \frac{ae^{-K(t)} + b}{e^{-K(t)} + 1} \text{ om } b < x(0) < a \end{aligned} \tag{1}$$

   där det första lösningen har singularitet vid $t = t_0$. Vi ser nu (gör vi det? Rita lösningar!) att om $x(0) < a$ då går $x(t)$ mot den stabila jämviktspunkten b och om $x(0) > a$ då "exploderar" lösningen inom ändlig tid mot $+\infty$.

2. Systemets matris

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

   har egenvärden $\lambda_1 = 1$ och $\lambda_2 = -2$ med motsvarande egenvektorer $\overrightarrow{v_1} = (1,0)^t$ och $\overrightarrow{v_2} = (-1,3)^t$. Den allmänna lösningen är alltså

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = C_1 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 e^{-2t} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

   Fasporträtt ser ut som på Figur 1. Origo är en instabil sadelpunkt. Detta framgår både från fasporträttet och från det faktum att $\mathrm{Re}(\lambda_1) > 0$.

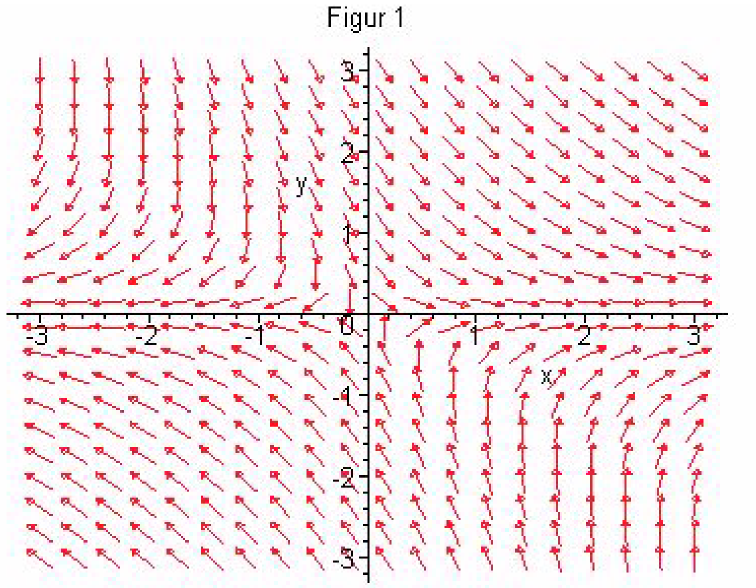

Figure 1:

3. a) Jämviktspunkter får vi genom att lösa systemet

$$\begin{cases} L-(L^2+aLR)=0 \\ R-(R^2+aRL)=0 \end{cases}$$

vilket ger följande fyra jämviktspunkter: $(L_1,R_1)=(0,0)$, $(L_2,R_2)=(1,0)$, $(L_3,R_3)=(0,1)$, $(L_4,R_4)=(\frac{1}{a+1},\frac{1}{a+1})$ varav bara en icke-trivial. Systemets Jacobimatrisen

$$J(L,R)=\begin{pmatrix} 1-2L-aR & -aL \\ -aR & 1-2R-aL \end{pmatrix}$$

kan lätt beräknas vid alla jämviktspunkter. För $(0,0)$

$$J(0,0)=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

så att $\beta = Tr\ J(0,0)=2>0$ vilket ger att $(0,0)$ är instabil. Dessutom, $\det(J)=1>0$ så att det måste vara en spiral eller en knut. Vidare, $\delta=\beta^2-4\det(J)=0$ så man kan inte avgöra mellan dessa två. Jacobimatrisen är dock så enkellt här att man kan lätt se att punkten $(0,0)$ är en knut. För $(1,0)$:

$$J(1,0)=\begin{pmatrix} -1 & -a \\ 0 & 1-a \end{pmatrix}$$

och $\beta=Tr\ J(1,0)=-a<0$, $\det(J)=a-1>0$ medan $\delta=\beta^2-4\det(J)=(a-2)^2\geq 0$. Punkten $(1,0)$ är alltså en stabil knut. För $(0,1)$:

$$J(0,1)=\begin{pmatrix} 1-a & 0 \\ -a & -1 \end{pmatrix}$$

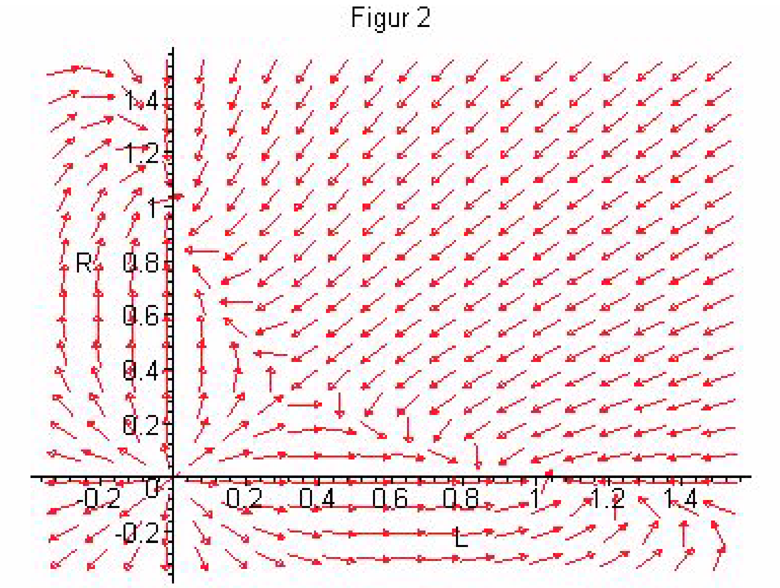

Figure 2:

så att $(0, 1)$ har samma β, $\det(J)$ och δ som $(1, 0)$ och slutsasten måste därför vara samma. För $(\frac{1}{a+1}, \frac{1}{a+1})$:

$$J(\frac{1}{a+1}, \frac{1}{a+1}) = \frac{-1}{a+1} \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{pmatrix}$$

och $\beta = Tr\ J(\frac{1}{a+1}, \frac{1}{a+1}) = -2/(a+1) < 0$ och $\det(J) = (1-a)/(1+a) < 0$ vilket ger sadelpunkt (instabil förstås).

b) Det finns fyra nullclines: $L = 0$, $R = 0$, $R = 1 - aL$ och $L = 1 - aR$. De två sista skär varandra i jämviktspunkten $(\frac{1}{a+1}, \frac{1}{a+1})$. Genom en enkel analys av vektorfältet längst nullclines får vi fasbilden som på Figur 2. Som man kan se, beroende på begynnelsevillkoren, antingen L-sniglar eller R-sniglar dör ut inom en ändlig tid. I det sällsynta fallet där $R(0) = L(0)$ tenderar båda snigelpopulationer mot $1/(1+a)$, vilket är dock ett instabillt jämvikstläge.

4. Se boken, sidan 40 och följande, för formulering och bevis av kriteriet. Ur ekvationen $x_{n+1} = x_n \ln(x_n^2) \equiv f(x_n)$ hittar vi lätt två jämviktspunkter: $\overline{x}_1 = \sqrt{e}$ och $\overline{x}_2 = -\sqrt{e}$. Vidare, $|f'(\pm\sqrt{e})| = 3 > 1$ och båda punkter är alltså icke-stabila.

5. Variablebyte $P(x, t) = e^{\beta t + \gamma x} w(x, t)$ förvandlar vår PDE till följande PDE:

$$\beta w + w_t = w(D\gamma^2 + \alpha\gamma) + w_x(2D\gamma + \alpha) + Dw_{xx}$$

vilket har enklaste formen om vi väljer β och γ så att $D\gamma^2 + \alpha\gamma = \beta$ och $2D\gamma + \alpha = 0$ dvs om $\gamma = -\alpha/2D$ och $\beta = -\alpha^2/4D$. Vårt IBVP har nu formen

$$\begin{cases} \text{PDE:} & w_t = Dw_{xx} \\ \text{BCs:} & w(0, t) = w(L, t) = 0 \\ \text{IC:} & w(x, 0) = \sin(5\pi x/L) \end{cases} \tag{2}$$

Steg 1: Vi letar efter lösningar av separerad typ och sätter alltså in ansatzen $w(x,t) = X(x)T(t)$ in i PDE, vilket leder snabbt till ekvationen

$$\frac{T'}{DT} = \frac{X''}{X}$$

där VL beror endast på t medan HL beror enbart på x. Således, båda uttrycken måste vara lika med en (negativ, annars kommer $T(t)$ stiga oinskränkt) konstant $-\lambda^2$. Detta leder till två (kopplade via separationskonstanten λ) ODEs

$$T' + D\lambda^2 T = 0\ , \quad X'' + \lambda^2 X = 0,$$

varav första har den allmänna lösningen $T(t) = Ce^{-D\lambda^2 t}$ och den andra $X(t) = A\cos(\lambda x) + B\sin(\lambda x)$. Således, elementära separerade lösningar har formen

$$w(x,t) = e^{-D\lambda^2 t}\left(A\cos(\lambda x) + B\sin(\lambda x)\right) \tag{3}$$

Steg 2: Vi sätter in (3) i randvillkoren BCs. Kravet $w(0,t) = 0$ leder till $A = 0$ vilket uttnytjas i det andra kravet $w(L,t) = 0$ som då antar formen $\sin(\lambda L) = 0$. Detta leder till 'kvantifiering' av vågnummer λ:

$$\lambda_n = \frac{n\pi}{L} \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

(negativa n insätta i (3) ger inga nya bidrag, likaså $n = 0$). Vi får alltså en följd av fundamentala lösningar på formen

$$w_n(x,t) = e^{-D\lambda_n^2 t}\sin(\frac{n\pi x}{L}) \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Steg 3: Vi letar efter lösningen till (2) på formen

$$w(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-D\lambda_n^2 t}\sin(\frac{n\pi x}{L}). \tag{4}$$

Uttrycket (4) satisferar både PDE och BCs för (nästan) varje godtycklig val av konstanter A_n. Sista kravet (begynnelsevillkoret IC) ger oss att

$$\sin(\frac{5\pi x}{L}) = w(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(\frac{n\pi x}{L})$$

och leder snabbt till att $A_5 = 1$ medan resten av A_n är lika med 0. Således, lösningen till det ursprungliga problemet antar formen

$$P(x,t) = \exp\left[\left(-\frac{\alpha^2}{4D} - D\left(\frac{5\pi}{L}\right)^2\right)t - \frac{\alpha}{2D}x\right]\sin\left(\frac{5\pi x}{L}\right). \tag{5}$$

b) Från (5) ser man att planktonpopulationen dör alltid ut.Faktorer som bidrar till att populationen dör ut är: stor diffusionskoefficient D, liten L samt stor α.

6. Vi definerar $R_1(c_1, c_2) = \delta - kc_1 - c_1c_2^2$, $R_2(c_1, c_2) = kc_1 + c_1c_2^2 - c_2$. Genom att lösa systemet $R_1(\overline{c}_1, \overline{c}_2) = 0$, $R_2(\overline{c}_1, \overline{c}_2) = 0$ får vi det enda homogena jämviktsläget $(\overline{c}_1, \overline{c}_2) = \left(\frac{d}{k+d^2}, d\right)$. Jacobimatrisen av systemet blir

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -k - c_2^2 & -2c_1c_2 \\ k + c_2^2 & 2c_1c_2 - 1 \end{pmatrix}\Bigg|_{(\overline{c}_1, \overline{c}_2)} = \begin{pmatrix} -k - d^2 & -2d^2/(k + d^2) \\ k + d^2 & (d^2 - k)/(d^2 + k) \end{pmatrix}$$

Som vi vet är vår kemiska reaktionen stabil om $\mathrm{Tr}(A) < 0$ och $\det(A) > 0$. Det andra villkoret är dock ej uppfylld här ty $\det(A) = k + \delta^2 < 0$. Reaktionen är alltså ej stabil och i konsekvens kan systemet inte utveckla diffusion driven instabilitet.