Krzysztof Marciniak, ITN
Linköpings universitet
tel. 011-363320
e-mail: krzma@itn.liu.se

Lösningsförslag för tentamen i matematiska modeller i biologi TATM 38

2003-10-23 kl. 08.00—13.00

1. a) Ekvationen är separabel - variablerna separeras genom

$$\frac{dx}{\sin^2(\beta x)} = a\,dt$$

och ledvis integration leder till

$$\int \frac{dx}{\sin^2(\beta x)} = \int a\,dt,$$

dvs till

$$-\frac{1}{\beta}\cot(\beta x) = at + C,$$

och insättning av begynnelsevillkoret ger att $C = 0$. Den sista ekvationen kan lösas med avseende på x, vilket ger den sökta lösningen:

$$x(t) = \frac{1}{\beta}\left(\operatorname{arccot}(-\beta a t)\right)$$

b) Eftersom

$$x(t) = \frac{1}{\beta}\left(\operatorname{arccot}(-\beta a t)\right) = \frac{1}{\beta}\left(\frac{\pi}{2} - \arctan(-\beta a t)\right) = \frac{1}{\beta}\left(\frac{\pi}{2} + \arctan(\beta a t)\right)$$

måste funktionen $x(t)$ se ut som på Figur 1.

c) Bärandekapaciteten av miljön är $\lim_{t\to\infty} x(t) = \pi/\beta$. Detta kan även avläsas ur Figur 1.

2. a) Systemets matris

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$$

har två komplexkonjugerade egenvärden $\lambda_{1,2} = \alpha \mp i\beta$ med motsvarande två komplexa egenvektorer

$$\overrightarrow{V}_{1,2} = \begin{pmatrix} 1 \\ \pm i \end{pmatrix}.$$

(obs. teckenuppsättning). Den allmänna lösningen ges således av

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} &= C_1 \overrightarrow{V}_1 e^{(\alpha - i\beta)t} + C_2 \overrightarrow{V}_2 e^{(\alpha + i\beta)t} = \\
&= e^{\alpha t}\left[C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}(\cos(\beta t) - i\sin(\beta t)) + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}(\cos(\beta t) + i\sin(\beta t))\right]
\end{aligned}$$

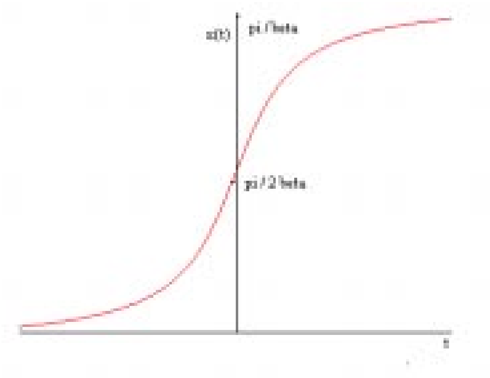

Figure 1:

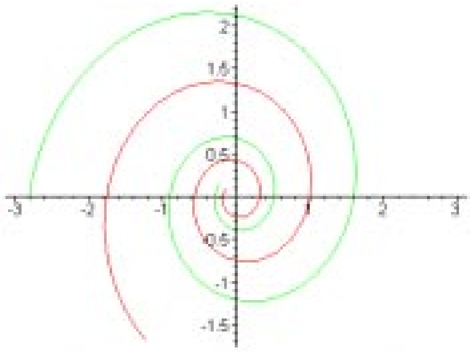

Figure 2:

Den reella formen får vi om vi sätter $D_1 = C_1 + C_2$, $D_2 = i(C_2 - C_1)$:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = e^{\alpha t} \begin{pmatrix} D_1 \cos(\beta t) + D_2 \sin(\beta t) \\ D_1 \sin(\beta t) - D_2 \cos(\beta t) \end{pmatrix}$$

En alternativt metod är att lösa samma systemet i polära koordinater (r, θ), ty i de koordinaterna systemet har speciellt enkel form:

$$\dot{r} = \alpha r, \quad \dot{\theta} = \beta$$

vilket ger oss lösningen $r(t) = r_0 e^{\lambda t}$, $\theta(t) = \theta_0 + \beta t$.

b) $\det(A) = \alpha^2 + \beta^2 > 0$ så origo $(0, 0)$ är en enda jämviktspunkt. Eftersom $\lambda_{1,2} = \alpha \mp i\beta$ med $\alpha > 0$ vet vi att fasbilden blir en ostabil spiral centrerad i origo, som på Figur 2. Detta framgår även av den allmänna lösningen på polärform (se a)) eller av det faktum att $\mathrm{Tr}(A) > 0$, $\det(A) > 0$ medan diskriminanten av A är mindre än noll (enligt "$\beta - \gamma$" diagrammet).

3. a) Kemostatekvationerna har två jämviktspunkter

$$(\overline{n}_1, \overline{c}_1) = \left(\alpha_1\left(\alpha_2 - \frac{1}{\alpha_1 - 1}\right), \frac{1}{\alpha_1 - 1}\right), \quad (\overline{n}_2, \overline{c}_2) = (0, \alpha_2)$$

Systemets Jakobimatris i punkten $(\overline{n}_2, \overline{c}_2)$ antar formen

$$J = J(0, \alpha_2) = \left.\begin{pmatrix} \alpha_1 \frac{c}{1+c} - 1 & \frac{\alpha_1 n}{(1+c)^2} \\ -\frac{c}{1+c} & -\frac{n}{(1+c)^2} - 1 \end{pmatrix}\right|_{(0,\alpha_2)} = \begin{pmatrix} \alpha_1 A - 1 & 0 \\ -A & -1 \end{pmatrix},$$

där $A = \alpha_2/(1+\alpha_2)$. Punkten är stabil om och endast om $\mathrm{Tr}(J) < 0$ och $\det(J) > 0$ vilket i detta fall leder till följande två olikheter:

$$\alpha_1 A - 2 < 0, \quad 1 - \alpha_1 A > 0.$$

De är uppfyllda samtidigt om och endast om $\alpha_1 A < 1$ dvs om

$$(\alpha_1 - 1)\alpha_2 < 1. \tag{1}$$

b) Villkoret (1) betyder att antingen i) $\alpha_1 \leq 1$ eller ii) $\alpha_2 < 1/(\alpha_1 - 1)$. I bägge fall är den första jämvikstpunkten utanför den första kvadranten, alltså existerar inte i biologisk mening. Villkoret i) betyder att bakterier har för liten tillväktkoefficient för att överleva medan villkoret ii) betyder att bakterier förvisso har tillräckligt stor tillväxtkoefficient men det näringsämnet som flödar in i kemostaten har för låg koncentration α_2. I bägge fallen dör alltså bakteriepopulationen ut.

4. a) Ekvationen $x_{n+1} = \frac{1}{2+x_n} \equiv f(x_n)$ har två jämviktspunkter: $\overline{x}_{1,2} = -1 \pm \sqrt{2}$. Eftersom $f'(x) = -1/(2+x)^2$ har vi att $\left|f'(-1+\sqrt{2})\right| = 1/(1+\sqrt{2})^2 < 1$ medan $\left|f'(-1-\sqrt{2})\right| = 1/(1-\sqrt{2})^2 > 1$. Detta medför att $\overline{x}_1 = -1+\sqrt{2}$ är stabil medan $\overline{x}_2 = -1-\sqrt{2}$ är ostabil.

   b) Ekvationen $x = f(f(f(x)))$ antar formen

$$x = \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2+x}}}$$

och har lösningar $-1+\sqrt{2}$ och $-1-\sqrt{2}$ vilka sammanfaller med jämviktspunkterna (1-cykler) $\overline{x}_{1,2}$. Ekvationen har således inga gedigna tre-cykler (om den haft sådana cykler så skulle den ha även alla andra perioder, enligt Sharkovskijssatsen).

5. Eftersom randvillkoren är icke-homogena, gör vi först ett variabelbyte $w(x,t) = u(x,t) - L$. Vi får följande IBVP för funktionen w:

$$\begin{cases} \text{PDE:} & w_t = \alpha^2 w_{xx}, \quad 0 < x < L, \quad 0 < t < \infty \\ \text{BCs:} & w_x(0,t) = u_x(0,t) = 0, \; w(L,t) = L - L = 0, \quad 0 < t < \infty \\ \text{IC:} & w(x,0) = -\cos(\frac{5\pi}{2L}x) + \cos(\frac{9\pi}{2L}x) + L - L, \quad 0 < x < L \end{cases} \tag{2}$$

vilket kan lösas med variabelseparation.

Steg 1: Vi letar efter lösningar av separerad typ och sätter alltså in ansatsen $w(x,t) = X(x)T(t)$ in i PDE, vilket leder till ekvationen

$$\frac{T'}{\alpha^2 T} = \frac{X''}{X}$$

där VL beror endast på t medan HL beror enbart på x. Således, båda uttrycken måste vara lika med en (negativ, annars uppfyller endast $X(x) = 0$ randvillkoren) konstant $-\lambda^2$. Detta leder till två (kopplade via separationskonstanten λ) ODEs

$$T' + \alpha^2\lambda^2 T = 0 \ , \quad X'' + \lambda^2 X = 0,$$

varav den första har den allmänna lösningen $T(t) = Ce^{-(\alpha\lambda)^2 t}$ och den andra $X(t) = A\cos(\lambda x) + B\sin(\lambda x)$. Således, de elementära separerade lösningar har formen

$$w(x,t) = e^{-(\alpha\lambda)^2 t}\left(A\cos(\lambda x) + B\sin(\lambda x)\right) \tag{3}$$

Steg 2: Vi sätter in (3) i randvillkoren BCs. Kravet $0 = w_x(0,t) = e^{-(\alpha\lambda)^2 t}(B\lambda)$ leder till $B = 0$ vilket uttnytjas i det andra kravet $0 = w(L,t) = e^{-(\alpha\lambda)^2 t} A\cos(\lambda L)$ som då antar formen $\cos(\lambda L) = 0$. Detta leder till kvantifiering av vågnummer λ:

$$\lambda_n = \frac{\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi}{L} \qquad n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

(negativa n insätta i (3) ger inga nya bidrag, däremot $n = 0$ gör det). Vi får alltså en följd av fundamentala lösningar på formen

$$w_n(x,t) = e^{-(\alpha\lambda_n)^2 t}\cos\left(\frac{\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi}{L}x\right) \qquad n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

Steg 3: Vi letar efter lösningen till (2) på formen

$$w(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n e^{-(\alpha\lambda_n)^2 t}\cos\left(\frac{\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi}{L}x\right). \tag{4}$$

Uttrycket (4) satisferar både PDE och BCs för (nästan) varje godtycklig val av konstanter A_n. Sista kravet (begynnelsevillkoret IC) ger oss att

$$-\cos\left(\frac{5\pi}{2l}x\right) + \cos\left(\frac{9\pi}{2L}x\right) = w(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\left(\frac{\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi}{L}x\right)$$

och leder snabbt till att $A_2 = -1$, $A_4 = 1$ medan resten av A_n är lika med 0. Således, lösningen till det ursprungliga problemet antar formen

$$u(x,t) = w(x,t) + L = L - \exp\left(-\alpha^2\left(\frac{5\pi}{2L}\right)^2 t\right)\cos\left(\frac{5\pi}{2L}x\right) + \exp\left(-\alpha^2\left(\frac{9\pi}{2L}\right)^2 t\right)\cos\left(\frac{9\pi}{2L}x\right)$$

6. a) Systemet beskriver en rovdjur-byte-modell med migrationstermer $\mu_i \frac{\partial^2 c_i}{\partial x^2}$. Byte c_1 växer logistiskt med bärandekapacitet K (termen $rc_1\left(1 - c_1/K\right)$) medan rovdjur vid frånvaron av byte försvinner exponentiellt (termen $-\beta c_2$). Vidare, termen $-\alpha c_1 c_2$ beskriver minskning av byte pga möten med rovdjur och termen $\gamma c_1 c_2$ beskriver ökning av rovdjur pga samma möten.

b) Vi definerar $R_1(c_1, c_2) = rc_1\left(1 - \frac{c_1}{K}\right) - \alpha c_1 c_2$, $R_2(c_1, c_2) = -\beta c_2 + \gamma c_1 c_2$. Genom att lösa systemet $R_1(\overline{c}_1, \overline{c}_2) = 0$, $R_2(\overline{c}_1, \overline{c}_2) = 0$ får vi tre homogena jämviktslägen, varav bara en icke-trivial: $(\overline{c}_1, \overline{c}_2) = \left(\frac{\beta}{\gamma}, \frac{r}{\alpha}\left(1 - \frac{\beta}{K\gamma}\right)\right)$. Denna punkt är meningsfull (dvs ligger i första kvadranten) enbart om $\beta < K\gamma$.

c) Jacobimatrisen av systemet blir

$$J = J(\overline{c}_1, \overline{c}_2) = \begin{pmatrix} -\frac{r\beta}{\gamma K} & -\alpha\overline{c}_1 \\ \gamma\overline{c}_2 & 0 \end{pmatrix}$$

Eftersom $\mathrm{Tr}(J) < 0$ och $\det(J) = \alpha\gamma\overline{c}_1\overline{c}_2 > 0$ så snart den icke triviala punkten $(\overline{c}_1, \overline{c}_2)$ ligger i första kvadranten ser vi att arternas samlevnad är då stabil. Men eftersom $J_{22} = 0$ kan villkoret för diffusionsdriven instabilitet inte upfyllas i den här modellen.