Krzysztof Marciniak, ITN
Linköpings universitet
tel. 011-363320
e-mail: krzma@itn.liu.se

Lösningsförslag för tentamen i matematiska modeller i biologi TATM 38

2004-08-23 kl. 14—19

1. a) Systemet jämviktspunkter får vi genom att lösa ekvationen

$$f(x) \equiv rx(1 - \frac{x}{\alpha + \beta x}) = 0$$

vilket ger två jämviktspunkter: $x_0 = 0$ och $x_1 = \frac{\alpha}{1-\beta} > 0$ ty $\beta < 1$. Eftersom $f'(x_0) = r > 0$ och $f'(x_1) = r(\beta - 1) < 0$ har vi att x_1 är stabil medan x_0 är ostabil.

b) Eftersom x_1 är stabil och x_0 är ostabil vet vi att alla lösningar $x(t)$ med $x(0) > 0$ kommer att gå mot x_1 och därför är bärandekapaciteten K lika med $x_1 = \frac{\alpha}{1-\beta}$.

c) Om $x < K$ har vi att $\frac{dx}{dt} = f(x) > 0$ medan för $x > K$ gäller att $\frac{dx}{dt} = f(x) < 0$. Det betyder att lösningar $x(t)$ i de två skilda fallen ser ut som på Figur 1.

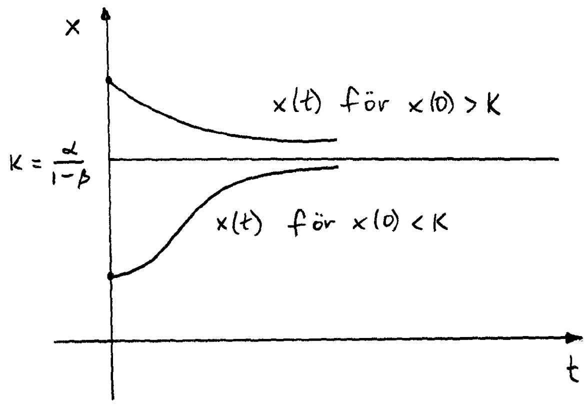

Figure 1:

2. Se boken, kap. 5.5, 5.6 (särskilt sid. 182) och kap. 4.9.

3. Variabelbytet

$$u(x,t) = \exp(-\beta t) w(x,t)$$

förvandlar vårt IBVP till följande IBVP för $w(x,t)$

$$\begin{cases} \text{PDE:} & w_t = \alpha^2 w_{xx}, \ \ 0 < x < L, \ \ 0 < t < \infty \\ \text{BCs:} & w_x(0,t) = w(L,t) = 0, \quad 0 < t < \infty \\ \text{IC:} & w(x,0) = u(x,0) = \cos(\frac{\pi}{2L}x) - 3\cos(\frac{3\pi}{2L}x), \quad 0 < x < L \end{cases}$$

En standard procedur för variabelseparation leder till följande fundamentala lösningar för PDE+BC's:

$$w_n(x,t) = e^{-\alpha^2 \lambda_n^2 t} \cos(\lambda_n x), \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

där egenvärden λ_n ges av

$$\lambda_n = \frac{\frac{1}{2} + n}{L} \pi.$$

Vi letar nu efter en lösning av hela IBVP på formen

$$w(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n w_n(x,t).$$

Genom att sätta in detta i IC och utnyttja det faktum att funktionerna $\cos(\lambda_n x)$ är ortogonala:

$$\int_0^L \cos\left(\frac{\frac{1}{2} + n}{L} \pi x\right) \cos\left(\frac{\frac{1}{2} + m}{L} \pi\right) dx = \begin{cases} 0, \ m \neq n \\ \frac{L}{2}, \ m = n \end{cases}$$

får vi att $A_0 = 1$, $A_1 = -3$ medan $A_i = 0$ för $i = 2, 3, \ldots$. Således, vårt ursprungliga IBVP har lösningen $u(x,t) = e^{-\beta t} w(x,t)$, eller

$$u(x,t) = e^{-\beta t} \left(e^{-\left(\frac{\alpha\pi}{2L}\right)^2 t} \cos\left(\frac{\pi}{2L} x\right) - 3 e^{-\left(\frac{3\alpha\pi}{2L}\right)^2 t} \cos\left(\frac{3\pi}{2L} x\right) \right)$$

4. Systemet har följande matris

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}$$

som har två komplexkonjugerade egenvärden $\lambda_{1,2} = 2 \pm i$ med motsvarande två komplexa egenvektorer

$$\overrightarrow{V}_{1,2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \pm i \end{pmatrix}.$$

Den allmänna lösningen blir alltså

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} &= C_1 \overrightarrow{V}_1 e^{(2+i)t} + C_2 \overrightarrow{V}_2 e^{(2-i)t} = \\ &= e^{2t} \left[C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2+i \end{pmatrix} (\cos t + i \sin t) + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2-i \end{pmatrix} (\cos t - i \sin t) \right] \end{aligned}$$

och efter insättningen $D_2 = C_1 + C_2$, $D_2 = i\,(C_1 - C_2)$ får vi den allmänna lösningen på en reell form:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = e^{2t} \begin{pmatrix} D_1 \cos t + D_2 \sin t \\ (2D_1 + D_2)\cos t + (2D_2 - D_1)\sin t \end{pmatrix}.$$

Eftersom $\det(A) \neq 0$ är origo $(0,0)$ den enda jämviktspunkten och eftersom $\mathrm{Re}(\lambda_i) = 2 > 0$ är den ostabil. Vidare, eftersom $\beta = Tr(A) = 4 > 0$, $\gamma = \det(A) = 5 > 0$ medan $\delta = \beta^2 - 4\gamma = -4 < 0$ vet vi att det är en ostabil spiral. Nullcline $\dot{x} = 0$ sammanfaller med x-axeln medan nullcline $\dot{y} = 0$ är en rät linje $y = \frac{5}{4}x$. Fasbilden ser ut som på Figur 2.

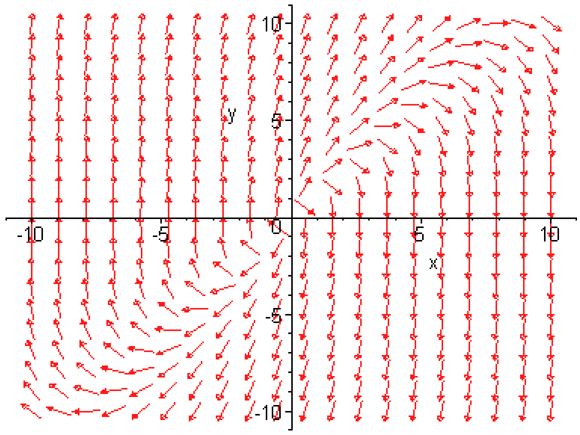

Figure 2:

5. Ekvationen representerar en population som växer logistiskt och som blir "utfiskad" med en intensitet proportionellt mot populationens storlek. Låt oss beteckna ekvationens högerled med $f(x_n)$. Ekvationens jämviktspunkter x uppfyller sambandet $f(x) = x$ som har två rötter: $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{a-b-1}{a} > 0$. Vidare, $f'(x_1) = a - b > 1$ så att x_1 är ostabil, medan $f'(x_2) = b+2-a$. Således, x_2 är (säkert) stabil om $|b - a + 2| < 1$, d.v.s. om $a-3 < b < a-1$, vilket är kompatibel med det ursprungliga kravet $a - b > 1$ som alltså påverkar ej resultatet.

6. Se boken, sid. 502-505.