Krzysztof Marciniak, ITN
Linköpings universitet
tel 011-363320
e-mail: krzma@itn.liu.se

Tentamen i matematiska modeller i biologi TATM 38

2004-01-15 kl. 14—19

Tillåtna hjälpmedel: Physics Handbook for Scientists and Engineers och TEFYMA tabeller.
Jour: Hans Lundmark, MAI, tel. 013-281475.
Varje uppgift bedöms med 0-3p.
För godkänt (3) krävs minst 8p samt minst 2 uppgifter bedömda 2p eller högre.
För väl godkänd (4) respektive mycket väl godkänd (5) krävs 12 respektive 15 poäng.

1. En population beskrivs av följande ekvation

$$\frac{dx}{dt} = ax(1 - x^2) \quad \text{där } a > 0 \tag{1}$$

   a) Ange den allmänna lösningen till (1).

   b) Ange den lösning till (1) som uppfyller $x(0) = 0$ samt den lösning till (1) som uppfyller $x(0) = 1$.

   c) Ange systemets jämviktspunkter och bestäm deras stabilitet.

2. Ange den allmänna lösningen av systemet

$$\frac{dx}{dt} = -x - 2y, \quad \frac{dy}{dt} = 2x - y$$

   på reell form. Undersök stabilitet hos jämviktspunkter och rita fasbilden.

3. Betrakta följande system av differensekvationer::

$$x_{n+1} = 2x_n - y_n, \quad y_{n+1} = 4x_n + 2y_n$$

   Ange den allmänna lösningen till systemet på reell form. Ange den lösning som upfyller villkoren $x_0 = 1$, $y_0 = 0$. Vad händer med lösningen för stora n?

4. En population av en viss art evolverar enligt följande icke-linjära differensekvation:

$$x_{n+1}\left(x_n^2 + 1\right) = ax_n^2, \; n = 0, 1, 2, \ldots \quad , \quad a > 0.$$

   Ange alla jämviktspunkter och beskriv hur dessa beror på parametern a.Undersök också deras stabilitet.

5. Lös följande IBVP

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, \quad a < x < b, \;\; 0 < t < \infty \\ u(a,t) = 0, \; u(b,t) = 0, \quad 0 < t < \infty \\ u(x,0) = \sin(\pi \frac{x-a}{b-a}), \quad a < x < b \end{cases}$$

Tips: du kan förenkla uppgiften genom att först utföra följande variabelbyte:

$$y(x) = \frac{x-a}{b-a}$$

6. a) Beskriv Lotka-Volterra rovdjur-byte modellen med exponentiell tillväxt av både rovdjur och byte.

   b) Ange modellens jämviktspunkter och bestäm deras stabilitet och karaktär.

   c) Rita även systemets "nullclines" och bestäm fasbilden.

   d) Dra slutsatser gällande systemets framtid vid olika utgångslägen.