Krzysztof Marciniak, ITN
Linköpings universitet
tel 011-363320
e-mail: krzma@itn.liu.se

Tentamen i matematiska modeller i biologi TATM 38

2003-08-23 kl. 14.00—19.00

Tillåtna hjälpmedel: Physics Handbook for Scientists and Engineers och TEFYMA tabeller.
Jour: Markus Sköldstam, MAI, ankn. 2865
Varje uppgift bedöms med 0-3p.
För godkänt (3) krävs minst 8p samt minst 2 uppgifter bedömda 2p eller högre.
För väl godkänd (4) respektive mycket väl godkänd (5) krävs 12 respektive 15 poäng.
I parentes anges hur många poäng är varje deluppgift värd.

1. En population av mikroorganismer evolverar enligt följande ekvation

$$\frac{dx}{dt} = (x-a)(x-b) \quad \text{där } a > b > 0 \tag{1}$$

   där $x = x(t)$ är populationsdensitet vid tiden t.

   a) Bestäm alla jämviktspunkter och avgör deras stabilitet (1p).

   b) Lös ekvationen (1) genom variabelseparation. Vad händer med x när $t \to \infty$? (2p).

2. Ange den allmänna lösningen av systemet

$$\frac{dx}{dt} = x + y, \quad \frac{dy}{dt} = -2y$$

   (1p). Rita systemets fasporträtt (1p). Avgör stabilitet av $(0,0)$ (1p)

3. Följande systemet beskriver populationsdynamik i en population av höger- och -vänstervirade (rigth- and left curling) sniglar enligt O. Bretscher och R. Gottlieb:

$$\frac{dL}{dt} = L - (L^2 + aLR)\ , \ \frac{dR}{dt} = R - (R^2 + aRL), \ \ a > 1.$$

   där $L = L(t) \geq 0$ och $R = R(t) \geq 0$ beskriver antalet vänster- respektive höger-virade sniglar.

   a) Ange alla jämviktspunkter och avgör deras stabilitet samt karaktär (dvs. om punkten är spiral, knut etc...) (1.5p)

   c) Rita alla nullclines och fasbilden av systemet samt avgör sniglarnas framtid. (1.5p)

4. Betrakta en icke-linjär differensekvation $x_{n+1} = f(x_n)$ med en jämviktspunkt $\overline{x}$. Formulera (1p) och bevisa (1p) stabilitetskriterium för $\overline{x}$. Tillämpa den för att avgöra stabilitet av alla jämviktspunkter av ekvationen $x_{n+1} = x_n \ln(x_n^2)$ (1p).

5. En population på intervallet $[0, L]$ beskrivs av ekvationen

$$\frac{\partial P}{\partial t} = D\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \alpha\frac{\partial P}{\partial x} \ , \qquad D \text{ och } \alpha > 0 \tag{2}$$

där $P = P(x, t)$ beskriver avvikelsen av populationens densitet från ett visst jämviktsläge. Vid $t = 0$ distributionen ges av

$$P(x, 0) = \exp\left(-\frac{\alpha x}{2D}\right)\sin\left(5\pi x/L\right)$$

Dessutom vet man att $P = 0$ vid intervallets ändpunkter.

a) Ange den exakta lösningen $P(x, t)$ genom att separera variabler i (2) (2p)

b) För vilka värden på α kommer avvikelsen att överleva? Vilka faktorer är bidragande till att avvikelsen överlever? (1p)

6. Betrakta en glykolytisk oscillator:

$$\frac{\partial c_1}{\partial t} = D_1\frac{\partial^2 c_1}{\partial x^2} + \delta - kc_1 - c_1c_2^2 \ , \quad \frac{\partial c_2}{\partial t} = D_2\frac{\partial^2 c_2}{\partial x^2} + kc_1 + c_1c_2^2 - c_2 \tag{3}$$

där D_1 och $D_2 > 0$ och där $k < -\delta^2$.

a) Ange det homogena jämviktstillståndet. (1p)

b) Undersök om systemet kan utveckla diffusion-driven instabilitet. (2p)