Krzysztof Marciniak, ITN
Linköpings universitet
tel 011-363320
e-mail: krzma@itn.liu.se

Tentamen i matematiska modeller i biologi TATM 38

2003-10-23 kl. 08.00—13.00

Tillåtna hjälpmedel: Physics Handbook for Scientists and Engineers och TEFYMA tabeller.
Jour: Hans Lundmark, MAI, tel. 013-281475.
Varje uppgift bedöms med 0-3p.
För godkänt (3) krävs minst 8p samt minst 2 uppgifter bedömda 2p eller högre.
För väl godkänd (4) respektive mycket väl godkänd (5) krävs 12 respektive 15 poäng.
I parentes anges hur många poäng är varje deluppgift värd.

1. En population evolverar enligt följande ekvation

$$\frac{dx}{dt} = a\sin^2(\beta x) \quad \text{där } a, \beta > 0 \tag{1}$$

a) Ange en lösning av (1) som uppfyller $x(0) = \frac{\pi}{2\beta}$. (1p)

b) Rita denna lösning. (1p)

c) Vad är bärandekapacitet av miljön i detta fall? (1p)

2. Följande system är givet:

$$\frac{dx}{dt} = \alpha x - \beta y, \quad \frac{dy}{dt} = \beta x + \alpha y \quad \text{ med } \alpha, \beta > 0.$$

a) Ange den allmänna lösningen. (2p)

b) Ange stabiliteten av jämviktspunkter och rita fasbilden. (1p)

3. Betrakta kemostatekvationerna

$$\dot{n} = \alpha_1 \left(\frac{c}{1+c}\right) n - n, \quad \dot{c} = -\left(\frac{c}{1+c}\right) n - c + \alpha_2$$

där $n = n(t)$, $c = c(t)$, $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 > 0$.

a) Ange ett nödvändigt och tillräckligt villkor för att den triviala jämviktspunkten är stabil. (2p)

b) Tolka detta villkoret inom kemostatmodelen. (1p)

4. Ange alla jämviktspunker av differensekvationen

$$x_{n+1} = \frac{1}{2 + x_n}$$

och ange deras stabilitet. (1p) Undersök också om ekvationen har några 3-cykler och om svaret är ja bestäm deras stabilitet. (2p)

5. Lös följande IBVP (3p).

$$\begin{cases} u_t = \alpha^2 u_{xx}, \quad 0 < x < L, \quad 0 < t < \infty \\ u_x(0,t) = 0, \; u(L,t) = L, \quad 0 < t < \infty \\ u(x,0) = -\cos(\frac{5\pi}{2L}x) + \cos(\frac{9\pi}{2L}x) + L, \quad 0 < x < L \end{cases}$$

6. Betrakta en populationsmodell:

$$\frac{\partial c_1}{\partial t} = \mu_1 \frac{\partial^2 c_1}{\partial x^2} + r c_1 \left(1 - \frac{c_1}{K}\right) - \alpha c_1 c_2 \;, \quad \frac{\partial c_2}{\partial t} = \mu_2 \frac{\partial^2 c_2}{\partial x^2} - \beta c_2 + \gamma c_1 c_2$$

där $c_1 = c_1(x,t)$, $c_2 = c_2(x,t)$ och där alla konstanter $\mu_1, \mu_2, r, K, \alpha\,, \beta, \gamma$ är större än noll.

a) Tolka varje term i ekvationerna. (1p)

b) Ange det icke-triviala homogena jämviktstillståndet. (1p)

c) Undersök om systemet kan utveckla diffusionsdriven instabilitet. (1p)