Krzysztof Marciniak, ITN
Linköpings universitet

Tentamen i matematiska modeller i biologi TATM 38

2002-10-23 kl. 14.00—19.00

Tillåtna hjälpmedel: Physics Handbook for Scientists and Engineers och TEFYMA tabeller.
Jour: Claes Waksjö, MAI, ankn. 2370
Varje uppgift bedöms med 0-3p. För godkänt krävs minst 8p samt minst 2 uppgifter bedömda 2p eller högre.

1. En logistisk ekvation med en kvadratisk fisketerm ges av

$$\frac{dx}{dt} = rx\left(1 - \frac{x}{K}\right) - Ex^2 \equiv f(x) \quad \text{där } r, E, K > 0$$

   a) Bestäm alla jämviktspunkter och avgör deras stabilitet.
   b) Rita funktionen $f(x)$ och motsvarande vektorfältet på x-axeln.
   c) Vad är bärandekapacitet av miljön?

2. Ange den allmänna lösningen av systemet

$$\frac{dx}{dt} = -\omega y \qquad \frac{dy}{dt} = \omega x \qquad \omega > 0$$

   på en reell form. Rita även systemets fasporträtt. Avgör stabilitet av $(0, 0)$.

3. Betrakta följande rovdjur-byte systemet med migration:

$$\frac{dN_1}{dt} = rN_1 - \alpha N_1 N_2 - s \ , \ \ \frac{dN_2}{dt} = -cN_2 + \beta N_1 N_2 \ ,$$

   där $s/r = c/\beta$ och där r, s, c, α och β är > 0.
   a) Tolka varje term i ekvationerna. Speciellt avgör vilka symboler betecknar antalet rovdjur resp. antalet byte.
   b) Ange alla jämviktspunkter och beräkna deras stabilitet.
   c) Rita alla nullclines och fasbilden av systemet.
   d) Visa med hjälp av uppgiften c) att populationen av byte kan försvinna inom ett ändlig tid. Förklara vad som händer med populationsmedlemmar då.

4. Visa att om differensekvationen $x_{n+1} = f(x_n)$ har en 2-cykel (x, y) (så att $y = f(x)$ och $x = f(y)$, $x \neq y$) så är denna 2-cykel stabil om och endast om $|f'(x)f'(y)| < 1$

5. En planktondistribution på intervallet $[0, L]$ ges av

$$\frac{\partial S}{\partial t} = D\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + \beta S \ , \quad D \text{ och } \beta > 0$$

där $S = S(x,t)$ beskriver planktonens densitet i punkten x vid tiden t. Vid $t = 0$ distributionen ges av $S(x,0) = \sin(2\pi x/L)$. Planktonens densitet vid ändpunkter är noll.
a) Ange funktionen S explicit.
b) För vilka värden på β kommer planktonpopulationen att dö ut?
c) Vilka faktorer är bidragande till att populationen dör ut?

6. Betrakta Schnakenberg reaktion-diffusion systemet

$$\frac{\partial c_1}{\partial t} = D_1 \frac{\partial^2 c_1}{\partial x^2} + c_1^2 c_2 - c_1 + b \ , \quad \frac{\partial c_2}{\partial t} = D_2 \frac{\partial^2 c_2}{\partial x^2} - c_1^2 c_2 + a$$

där alla konstanter a, b, D_1 och D_2 är större än 0.
a) ange det homogena jämviktstillståndet
b) Kan man välja konstanterna a, b, D_1, D_2 så att diffusion-driven instabilitet uppstår i systemet?
c) Vilket ämne är aktivator och vilket inhibitor då?
d) Vilken typ av reaktionen ('activator-inhibitor' eller 'positive feedback') kommer att utvecklas i systemet då?