Krzysztof Marciniak, ITN
Linköpings universitet
tel 011-363320
e-mail: krzma@itn.liu.se

Tentamen i matematiska modeller i biologi TATM 38

2004-08-23 kl. 14—19

Tillåtna hjälpmedel: Physics Handbook for Scientists and Engineers och TEFYMA tabeller.
Jour: Ingemar Eriksson, MAI, tel. 0738042917.
Varje uppgift bedöms med 0-3p. För godkänt (3) krävs minst 8p. För väl godkänd (4) respektive mycket väl godkänd (5) krävs 12 respektive 15 poäng.

1. En population evolverar enligt följande ekvation

$$\frac{dx}{dt} = rx\left(1 - \frac{x}{\alpha + \beta x}\right) \text{ där } r, a, \beta > 0 \text{ och } \beta < 1.$$

a) ange alla jämvikspunkter och bestäm deras stabilitet.

b) ange systemets bärandekapacitet K.

c) rita ungefärlig systemets lösningar i $x - t$ planet för $x(0) > K$ och för $0 < x(0) < K$.

2. Ett dynamiskt system i $x - y$ planet är givet:

$$\frac{dx}{dt} = f(x, y) \qquad \frac{dy}{dt} = g(x, y)$$

a) förklara vad det betyder att (x_0, y_0) är systemets jämviktspunkt. Vad betyder det då att (x_0, y_0) är stabil / ostabil? Ange ett kriterium för stabilitet av jämviktspunkten (x_0, y_0).

b) bevisa detta kriterium genom att Taylorutveckla systemet kring (x_0, y_0) upp till linjära termer, dvs. genom att linjärisera systemet kring punkten (x_0, y_0).

3. Lös följande IBVP

$$\begin{cases} u_t = \alpha^2 u_{xx} - \beta u, & 0 < x < L, \quad 0 < t < \infty \\ u_x(0, t) = 0 = u(L, t), & 0 < t < \infty \\ u(x, 0) = \cos(\frac{\pi}{2L}x) - 3\cos(\frac{3\pi}{2L}x), & 0 < x < L \end{cases}$$

genom att först utföra variabelbytet $u(x, t) = \exp(-\beta t) w(x, t)$.

4. Ange den allmänna lösningen av systemet

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = -5x + 4y$$

Undersök stabilitet och karaktär av jämviktspunkten. Ange även nullclines (null-isokliner) och rita fasbilden.

5. En population av en viss art evolverar enligt följande differensekvationen:

$$x_{n+1} = ax_n\,(1 - x_n) - bx_n,\; n = 0, 1, 2, \ldots, \quad a, b > 0,\; a - b > 1.$$

Tolka alla termer i ekvationen. Ange alla jämviktspunkter och undersök noggrant hur deras stabilitet beror på a, b.

6. Betrakta en modell för cellulära slemsvampar:

$$\begin{cases} \frac{\partial a}{\partial t} = \mu \frac{\partial^2 a}{\partial x^2} - \chi \frac{\partial}{\partial x}\left(a \frac{\partial c}{\partial x}\right) \\ \frac{\partial c}{\partial t} = D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + fa - kc \end{cases}$$

där $a = a(x,t)$ och $c = c(x,t)$ är koncentrationer av slemsvampar respektive cAMP. Parametrar μ, χ, D, f, k är positiva konstanter. Härled de linjäriserade ekvationerna för små avvikelser $a'(x,t) = a(x,t) - \overline{a}$, $c'(x,t) = c(x,t) - \overline{c}$ från det homogena jämviktstillståndet $(\overline{a}, \overline{c})$. Genom att anta att $a'(x,t) = Ae^{\sigma t}\cos(qx)$, $c'(x,t) = Be^{\sigma t}\cos(qx)$ härled villkoren för slemsvamparnas aggregationer (eng: conditions for aggregation of cellular slime molds).