# Formelsamling för transformteori TNDE24

Olof Svensson

# 1 Trigonometri

$$\sin a \cos b = \frac{1}{2}(\sin(a+b) + \sin(a-b)) \qquad \cos a \cos b = \frac{1}{2}(\cos(a+b) + \cos(a-b))$$

$$\sin a \sin b = \frac{1}{2}(-\cos(a+b) + \cos(a-b))$$

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b \qquad \cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

## 1.1 Några exakta värden

| Grader | Radianer | sin | cos | tan |
|---|---|---|---|---|
| 30° | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{1}{\sqrt{3}}$ |
| 45° | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{1}{\sqrt{2}}$ | $\frac{1}{\sqrt{2}}$ | 1 |
| 60° | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $\sqrt{3}$ |

# 2 Stegfunktioner och deltafunktioner

Heavisides stegfunktion $\theta(t)$, signumfunktionen $\mathrm{sgn}(t)$ och Diracs deltafunktion $\delta(t)$ defineras av

$$\theta(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \qquad \mathrm{sgn}(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ -1 & t < 0 \end{cases} \qquad \delta(t-T) = \frac{d}{dt}(\theta(t-T))$$

För Diracfunktionen $\delta(t)$ gäller att

$$\int_a^b \delta(t-T)dt = \begin{cases} 1 & \text{om } a < T < b \\ 0 & \text{annars} \end{cases} \qquad \int_a^b f(t)\delta(t-T)dt = \begin{cases} f(T) & \text{om } a < T < b \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$

# 3 Fourierserier

Om perioden är $T$ så ges Fourierserien av ($\Omega = \frac{2\pi}{T}$)

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\Omega t) + b_n \sin(n\Omega t)$$

där koefficienterna är

$$a_n = \frac{2}{T}\int_d^{d+T} f(t)\cos(n\Omega t)dt, \quad n = 0, 1, 2 \ldots$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_d^{d+T} f(t)\sin(n\Omega t)dt, \quad n = 1, 2, 3 \ldots$$

På komplex form är Fourierserien

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\Omega t}$$

där koeficienterna ges av

$$c_n = \frac{1}{T} \int_d^{d+T} f(t) e^{-in\Omega t} dt$$

## 3.1 Parsevals formler

Under lämpliga förutsättningar gäller att

$$\frac{1}{T} \int_d^{d+T} |f(t)|^2 dt = \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2).$$

På kompex form blir det

$$\frac{1}{T} \int_d^{d+T} |f(t)|^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2.$$

# 4 Fouriertransformer

| | $f(t)$ | $\hat{f}(\omega)$ | | $f(t)$ | $\hat{f}(\omega)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| F1 | $f(t)$ | $\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$ | F13 | $f * g(t)$ | $\hat{f}(\omega)\hat{g}(\omega)$ |
| F2 | $\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega$ | $\hat{f}(\omega)$ | F14 | $f(t)g(t)$ | $\frac{1}{2\pi} \hat{f} * \hat{g}(\omega)$ |
| F3 | $af(t) + bg(t)$ | $a\hat{f}(\omega) + b\hat{g}(\omega)$ | F15 | $\delta(t)$ | $1$ |
| F4 | $f(at)$ | $\frac{1}{\lvert a \rvert} \hat{f}(\frac{\omega}{a})$ | F16 | $\delta^{(n)}(t)$ | $(i\omega)^n$ |
| F5 | $f(-t)$ | $\hat{f}(-\omega)$ | F17 | $\theta(t) e^{-at}$ | $\frac{1}{a + i\omega}, \quad a > 0$ |
| F6 | $\overline{f(t)}$ | $\overline{\hat{f}(-\omega)}$ | F18 | $(1 - \theta(t)) e^{at}$ | $\frac{1}{a - i\omega}, \quad a > 0$ |
| F7 | $f(t - T)$ | $e^{-i\omega T} \hat{f}(\omega)$ | F19 | $e^{-a\lvert t \rvert}$ | $\frac{2a}{a^2 + \omega^2}, \quad a > 0$ |
| F8 | $e^{i\Omega t} f(t)$ | $\hat{f}(\omega - \Omega)$ | F20 | $\theta(t)$ | $\pi\delta(\omega) + \frac{1}{i\omega}$ |
| F9a | $f(t)\cos(\Omega t)$ | $\frac{1}{2}(\hat{f}(\omega - \Omega) + \hat{f}(\omega + \Omega))$ | F21 | $1$ | $2\pi\delta(\omega)$ |
| F9b | $f(t)\sin(\Omega t)$ | $\frac{1}{2i}(\hat{f}(\omega - \Omega) - \hat{f}(\omega + \Omega))$ | F22 | $\frac{\sin \Omega t}{\pi t}$ | $\theta(\omega + \Omega) - \theta(\omega - \Omega)$ |
| F10 | $\hat{f}(t)$ | $2\pi f(-\omega)$ | F23 | $\frac{1}{\sqrt{4\pi A}} e^{-t^2/(4A)}$ | $e^{-A\omega^2}$ |
| F11 | $f'(t)$ | $i\omega \hat{f}(\omega)$ | F24 | $\operatorname{sgn}(t)$ | $\frac{2}{i\omega}$ |
| F12 | $(-it)f(t)$ | $\hat{f}'(\omega)$ | F25 | $e^{-a\lvert t \rvert}\operatorname{sgn}(t)$ | $-\frac{2i\omega}{a^2 + \omega^2}, \; a > 0$ |

## 4.1 Plancherels formler

Under lämpliga förutsättningar gäller att

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \overline{g(t)} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) \overline{\hat{g}(\omega)} d\omega.$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega.$$

# 5 Laplacetransformer

| | $f(t)$ | $F(s)$ | | $f(t)$ | $F(s)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| L1 | $f(t)$ | $\int_{0-}^{\infty} e^{-st} f(t) dt$ | L11 | $\sin at$ | $\frac{a}{s^2+a^2}$ |
| L2 | $af(t) + bg(t)$ | $aF(s) + bG(s)$ | L12 | $\cos at$ | $\frac{s}{s^2+a^2}$ |
| L3 | $e^{-at} f(t)$ | $F(s+a)$ | L13 | $1$ | $\frac{1}{s}$ |
| L4 | $f(t-T)\theta(t-T)$ | $e^{-sT} F(s)$ | L14 | $e^{-kt}$ | $\frac{1}{s+k}$ |
| L5 | $f(at), \quad a > 0$ | $\frac{1}{a} F(\frac{s}{a})$ | L15 | $\theta(t-T)$ | $\frac{e^{-sT}}{s} \quad (T \geq 0)$ |
| L6 | $tf(t)$ | $-F'(s)$ | L16 | $t$ | $\frac{1}{s^2}$ |
| L7 | $f'(t)$ | $sF(s) - f(0-)$ | L17 | $t^n$ | $\frac{n!}{s^{n+1}}$ |
| L8 | $f''(t)$ | $s^2 F(s) - sf(0-) - f'(0-)$ | L18 | $\delta(t)$ | $1$ |
| L9 | $t^n f(t)$ | $(-1)^n F^{(n)}(s)$ | L19 | $\delta^{(n)}(t)$ | $s^n$ |
| L10 | $f * g(t)$ | $F(s)G(s)$ | L20 | $\delta(t-T)$ | $e^{-sT}$ |

## 5.1 Begynnelse- och slutvärdessatser

$$\lim_{t\to 0+} f(t) = \lim_{s\to\infty} sF(s)$$

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0+} sF(s)$$

# 6 $Z$-transformen

Enhetssteget $\sigma_n$ och enhetspulsen $\delta_n$ definieras som

$$\sigma_n = \begin{cases} 1 & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases} \qquad \delta_n = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases}$$

| | $\{x_n\}$ | $X(z)$ |
|---|---|---|
| Z1 | $x_n$ | $\sum_{n=0}^{\infty} x_n z^{-n}$ |
| Z2 | $ax_n + by_n$ | $aX(z) + bY(z)$ |
| Z3 | $a^n x_n$ | $X(\frac{z}{a})$ |
| Z4 | $nx_n$ | $-zX'(z)$ |
| Z6 | $x * y$ | $X(z)Y(z)$ |
| Z7 | $x_{n-k}\sigma_{n-k}$ | $z^{-k}X(z)$ |
| Z8 | $x_{n+k}$ | $z^k X(z) - z^k x_0 - z^{k-1}x_1 - \cdots - zx_{k-1}$ |
| Z9 | $\sigma_n$ | $\frac{z}{z-1}$ |
| Z10 | $\delta_n$ | $1$ |
| Z11 | $\delta_{n-k}$ | $z^{-k}$ |
| Z12 | $a^n$ | $\frac{z}{z-a}$ |
| Z13 | $n\sigma_n$ | $\frac{z}{(z-1)^2}$ |
| Z14 | $\sin(n\theta)$ | $\frac{z\sin\theta}{z^2 - 2z\cos\theta + 1}$ |
| Z15 | $a^n \sin(n\theta)$ | $\frac{za\sin\theta}{z^2 - 2az\cos\theta + a^2}$ |
| Z16 | $\cos(n\theta)$ | $\frac{z(z-\cos\theta)}{z^2 - 2z\cos\theta + 1}$ |
| Z17 | $a^n \cos(n\theta)$ | $\frac{z(z-a\cos\theta)}{z^2 - 2az\cos\theta + a^2}$ |
| K1 | $a^{n-1}\sigma_{n-1}$ | $\frac{1}{z-a}$ |