Krzysztof Marciniak, ITN
Linköpings universitet
tel. 011-363320
e-mail: krzma@itn.liu.se

Lösningar till tentamen i Transformer (TNDE 24)

för TL, MK

2006-05-26 kl. 8.00—13.00

1. Eftersom $T = 2$ har vi att $\Omega = 2\pi/T = \pi$. Funktionen f är varken jämn eller udda men den kan göras udda om vi subtraherar $3/4$. Betrakta alltså funktionen $g(t) = f(t) - 3/4$. Det är lätt att kolla (gör det!) att g är en udda funktion, så i dennes Fourierutveckling har vi att $a_n = 0$ för alla $n = 0, 1, 2, \ldots$ medan

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{4}{T}\int_0^{T/2} g(t)\sin(n\Omega t)dt = 2\int_0^1 (-1/4)\sin(n\pi t)dt = -\frac{1}{2}\left[-\frac{\cos(n\pi t)}{n\pi}\right]_{t=0}^{t=1} \\ &= \frac{1}{2n\pi}(\cos(n\pi) - 1) = \frac{1}{2n\pi}((-1)^n - 1) = \begin{cases} -\frac{1}{\pi n} & \text{för udda } n \\ 0 & \text{för jämna } n \end{cases} \end{aligned}$$

Således, funktionen f har Fourierserien:

$$\frac{3}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n\pi}((-1)^n - 1)\sin(n\pi t) = \frac{3}{4} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)\pi}\sin((2k+1)\pi t).$$

2. Vi börjar med att bestämma funktionens Fourierserie. Eftersom f är udda har vi att $a_n = 0$ för alla n. Vidare:

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\sin(n\Omega t)dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} t\sin(nt)dt \overset{\text{P.I.}}{=} \frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{n^2}\sin(nt) - \frac{1}{n}t\cos(nt)\right]_0^{\pi} = \\ &= \frac{2}{\pi}\cdot(-1)^{n+1}\frac{\pi}{n} = \frac{2(-1)^{n+1}}{n} \end{aligned}$$

Således, funktionens Fourierserie är (obs: $\Omega = 2\pi/T = 1$):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n}\sin(nt)$$

Parsevals identitet ger nu

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t^2 dt = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^2}$$

och (eftersom $VL = \pi^2/3$, elementär beräkning) så får vi

$$\frac{\pi^2}{3} = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

eller

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

3. a) Enligt (F23) med $A = 1/4$,

$$\mathcal{F}\left[e^{-t^2}\right] = \sqrt{\pi}e^{-\omega^2/4}.$$

Således, enligt (F12)

$$\mathcal{F}\left[te^{-t^2}\right] = i\frac{d}{d\omega}\mathcal{F}\left[e^{-t^2}\right] = i\frac{d}{d\omega}\left(\sqrt{\pi}e^{-\omega^2/4}\right) = -\frac{i\omega}{2}\sqrt{\pi}e^{-\omega^2/4}.$$

b) Enligt (F12) och resultatet i a)

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\left[t^2e^{-t^2}\right] &= i\frac{d}{d\omega}\mathcal{F}\left[te^{-t^2}\right] = i\frac{d}{d\omega}\left(-\frac{i\omega}{2}\sqrt{\pi}e^{-\omega^2/4}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{d}{d\omega}\left(\omega e^{-\omega^2/4}\right) = \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{2}\left(e^{-\omega^2/4} + \omega\cdot\left(-\frac{\omega}{2}\right)\cdot e^{-\omega^2/4}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{4}e^{-\omega^2/4}\left(2-\omega^2\right).\end{aligned}$$

4. Vi vet (formeln (F17)) att om $f(t) = \theta(t)e^{-t}$ så $\mathcal{F}\left[f(t)\right] = \frac{1}{1+i\omega}$ och då enligt (F11)

$$\mathcal{F}\left[f'(t)\right] = i\frac{\omega}{1+i\,\omega}.$$

Det betyder att

$$\mathcal{F}^{-1}\left[\frac{\omega}{1+i\,\omega}\right] = \frac{1}{i}\frac{d}{dt}\left(\theta(t)e^{-t}\right) = -i\left(\delta(t)-\theta(t)\right)e^{-t} = -i\left(\delta(t)-\theta(t)e^{-t}\right),$$

där den sista likheten följer ur det faktum att $\delta(t)e^{-t} = \delta(t)e^{-0} = \delta(t)$. Vi utnyttjade även sambandet $\theta'(t) = \delta(t)$ (se kap. 3.2.3 sid. 135).

5. Om $\mathcal{L}[y(t)] = Y(s)$ så gäller enligt (L8) att $\mathcal{L}[y''(t)] = s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) = s^2Y(s) - 1$. Dessutom, enligt (L12)

$$\mathcal{L}\left[2\cos(t\sqrt{5})\right] = 2\frac{s}{s^2+5}.$$

Laplacetransformen av vårt BVP blir då

$$s^2Y(s) - 1 + 5Y(s) = \frac{2s}{s^2+5},$$

vilket ger

$$Y(s) = \frac{2s}{\left(s^2+5\right)^2} + \frac{1}{s^2+5}.$$

Naturligtvis, enligt (L11)

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+5}\right] = \frac{1}{\sqrt{5}}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\sqrt{5}}{s^2+5}\right] = \frac{1}{\sqrt{5}}\sin(t\sqrt{5}). \tag{1}$$

Dessutom

$$\frac{2s}{\left(s^2+5\right)^2} = -\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s^2+5}\right)$$

vilket enligt (L9) samt (1) ovanför ger

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2s}{\left(s^2+5\right)^2}\right] = t\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}\sin(t\sqrt{5}).$$

Lösningen till vårt BVP blir alltså

$$y(t) = t\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}\sin(t\sqrt{5}) + \frac{1}{\sqrt{5}}\sin(t\sqrt{5}) = \frac{(t+1)}{\sqrt{5}}\sin(t\sqrt{5}).$$

6. Om $\mathcal{Z}[\{x_n\}] = X(z)$ så gäller enligt (Z8) att $\mathcal{Z}[\{x_{n+1}\}] = zX(z) - zx_0 = zX(z)$ samt $\mathcal{Z}[\{x_{n+1}\}] = z^2X(z) - z^2x_0 - zx_1 = z^2X(z) - z$. Alltså, $\mathcal{Z}$-transformen av ekvationen blir

$$z^2X(z) - z = \frac{1}{3}zX(z) + \frac{2}{3}X(z).$$

Detta ger att

$$X(z) = \frac{z}{z^2 - \frac{1}{3}z - \frac{2}{3}} = z\frac{1}{(z-1)(z+\frac{2}{3})}.$$

Observera att vi lämnar ett z utanför den rationella funktionen för att lättare kunna inverstransformera. PBU ger

$$X(z) = \frac{3}{5} \cdot \frac{z}{z-1} - \frac{3}{5} \cdot \frac{z}{z+\frac{2}{3}}.$$

Formlerna (Z12) samt (Z2) (linjäritet) ger oss snabbt att

$$x_n = \frac{3}{5}\left(1 - \left(-\frac{2}{3}\right)^n\right), \; n = 0, 1, 2, \ldots$$

7. Se boken, sid. 191.