Krzysztof Marciniak, ITN
Linköpings universitet
tel. 011-363320
e-mail: krzma@itn.liu.se

Lösningar till tentamen i Transformer (TNDE 24)
för TL, MK
2006-08-09 kl. 14.00—19.00

1. Funktionen $f(t) = |\cos t|$ är jämn och periodisk med perioden $T = \pi$ (rita!), så att $\Omega = 2\pi/T = 2$ och samtliga b_n är lika med noll. Vidare (för jämna funktioner)

$$a_n = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\cos(n\Omega t)dt = \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2} \cos t\cos(2nt)dt,$$

den sista likheten tack vare faktum att $\cos t$ är ≥ 0 mellan 0 och $\pi/2$. Genom att utnyttja det trigonometriska sambandet

$$\cos a\cos b = \frac{1}{2}(\cos(a+b) + \cos(a-b))$$

(finns med på formelbladet) får vi

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} [\cos((1+2n)t) + \cos((1-2n)t)]\,dt = \frac{2}{\pi}\left[\frac{\sin((1+2n)t)}{1+2n} + \frac{\sin((1-2n)t)}{1-2n}\right]_{t=0}^{t=\pi/2} \\ &= \frac{2}{\pi}\left(\frac{(-1)^n}{1+2n} + \frac{(-1)^n}{1-2n}\right) = \frac{4(-1)^n}{\pi(1-4n^2)}. \end{aligned}$$

Denna beräkning duger även vid $n = 0$ vilket ger $a_0 = 4/\pi$. a_0 kan även beräknas direkt:

$$a_0 = \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2} \cos t\,dt = \frac{4}{\pi}\,[\sin t]_0^{\pi/2} = \frac{4}{\pi}.$$

Således, funktionens Fourierserie är

$$\frac{2}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{\pi(1-4n^2)}\cos(2nt).$$

2. Vi använder definitionen av Fouriertransformen (F1) och utnyttjar Euler för att skriva om $e^{-i\omega t}$:

$$\widehat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,[\cos(\omega t) - i\sin(\omega t)]\,dt = 2\int_0^{\pi} (-t+\pi)\cos(\omega t)\,dt,$$

den sista likheten är sant ty f är jämn och eftersom mellan 0 och π ges funktionen av uttrycket $-t + \pi$. Således:

$$\widehat{f}(\omega) = -2\int_0^{\pi} t\cos(\omega t)\,dt + 2\pi\int_0^{\pi} \cos(\omega t)\,dt$$

Eftersom

$$\int \cos(\omega t)\,dt = \frac{1}{\omega}\sin(\omega t) + C$$

samt

$$\int t\cos(\omega t)\,dt \overset{\text{P.I.}}{=} \frac{1}{\omega^2}\cos(\omega t) + \frac{t}{\omega}\sin(\omega t)$$

får vi till sist

$$\widehat{f}(\omega) = -2\left[\frac{1}{\omega^2}\cos(\omega t) + \frac{t}{\omega}\sin(\omega t)\right]_0^\pi + \frac{2\pi}{\omega}\left[\sin(\omega t)\right]_0^\pi = \frac{2}{\omega^2}\left(1-\cos(\pi\omega)\right).$$

3. Vi börjar med att partialbråksuppdela funktionen $\widehat{f}(\omega)$ (men med avseende på variabeln ω^2 !):

$$\begin{aligned}\widehat{f}(\omega) &= \frac{\omega^2}{(\omega^2+4)(\omega^2+9)} = \frac{A}{\omega^2+4} + \frac{B}{\omega^2+9} = -\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{\omega^2+4} + \frac{9}{5}\cdot\frac{1}{\omega^2+9} = \\ &= -\frac{1}{5}\cdot\frac{2\cdot 2}{\omega^2+2^2} + \frac{3}{10}\cdot\frac{2\cdot 3}{\omega^2+3^2}\end{aligned}$$

Detta, enligt (F3) samt (F19), ger

$$\widehat{f}(\omega) = \mathcal{F}\left[-\frac{1}{5}e^{-2|t|} + \frac{3}{10}e^{-3|t|}\right],$$

så att den sökta inversen är

$$f(t) = -\frac{1}{5}e^{-2|t|} + \frac{3}{10}e^{-3|t|}.$$

4. Vi skall Laplacetransformera vårt BVP. Om vi inför beteckningar $\mathcal{L}[x(t)] = X(s)$ samt $\mathcal{L}[y(t)] = Y(s)$ så får vi enligt (L7)

$$\mathcal{L}[x'(t)] = sX(s) - x(0) = sX(s) - 1, \quad \mathcal{L}[y'(t)] = sY(s) - y(0) = sY(s).$$

Dessutom, enligt (L13), $\mathcal{L}[1] = \frac{1}{s}$. Laplacetransformering av vårt IBVP ger oss således ett system av två linjära ekvationer för $X(s)$ och $Y(s)$:

$$2sY(s) + sX(s) - 1 + X(s) = 0, \quad sY(s) + 2X(s) + Y(s) = \frac{1}{s}.$$

Detta systemet har entydig lösning:

$$\begin{aligned}X(s) &= \frac{1}{s-1} = \mathcal{L}[e^t] \\ Y(s) &= -\frac{1}{s(s-1)} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s-1} = \mathcal{L}[1-e^t]\end{aligned}$$

(enligt (L13),(L19) samt (L2)), så att den sökta lösningen blir

$$x(t) = e^t, \quad y(t) = 1 - e^t.$$

5. Se boken, sid. 193.

6. Vi börjar med att Z-transformera problemet. Om vi betecknar $\mathcal{Z}[\{x_n\}]$ som $X(z)$, får vi enligt (Z8):

$$\mathcal{Z}[\{x_{n+1}\}] = zX(z) - zx_0 = zX(z), \quad \mathcal{Z}[\{x_{n+2}\}] = z^2X(z) - z^2x_0 - zx_1 = z^2X(z)$$

samt, enligt (Z12),

$$\mathcal{Z}[\{2^n\}] = \frac{z}{z-2}.$$

Således, det transformerade problemet antar formen

$$z^2X(z) + 2zX(z) - 3X(z) = \frac{z}{z-2},$$

vilket ger lösningen

$$\begin{aligned} X(z) &= \frac{z}{(z^2+2z-3)(z-2)} = \frac{z}{(z+3)(z-1)(z-2)} \overset{*}{=} z\left(\frac{1}{20}\cdot\frac{1}{z+3} - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{z-1} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{z-2}\right) = \\ &\overset{(Z12)}{=} \mathcal{Z}\left[\left\{\frac{1}{20}(-3)^n - \frac{1}{4} + \frac{1}{5}2^n\right\}\right], \end{aligned}$$

där $(*)$ betyder PBU med ett z utanför (för lättare inverstransformering). Således, problemets lösning ges av

$$x_n = \frac{1}{20}(-3)^n - \frac{1}{4} + \frac{1}{5}2^n,\ n = 0, 1, 2, \ldots$$

7. Man inser snabbt att integralen är lika med $\mathcal{L}[t^6] = \frac{6!}{s^7}$ (formeln (L17) beräknad i $s = 3$. Således:

$$\int_0^\infty t^6 e^{-3t} dt = \frac{6!}{3^7}.$$