Krzysztof Marciniak, ITN
Linköpings universitet
tfn 011-36 33 20
e-post: krzma@itn.liu.se

Lösningar för tentamen i Transformer (TNDE 24)

för TL, MK

2007-01-11 kl. 08.00—13.00

1. Vi har $T = 2$ så att grundvinkelfrekvensen $\Omega = \pi$. Funktionen är udda (rita) så att $a_n = 0$ för alla $n = 0, 1, 2, \ldots$. Vidare,

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\sin(n\Omega t)\,dt = 2\int_0^1 (t+1)\sin(n\pi t)\,dt \overset{\text{P.I.}}{=} 2\left[\frac{1}{n^2\pi^2}\sin(n\pi t) - \frac{t+1}{n\pi}\cos(n\pi t)\right]_{t=0}^{t=1} \\ &= \frac{2}{n\pi}(1 - 2(-1)^n), \quad n = 1, 2, \ldots \end{aligned}$$

Således, den sökta Fourierserien blir

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi}(1 - 2(-1)^n)\sin(n\pi t).$$

2. Detta följer direkt ur formeln för a_n ty produkten av en udda funktion f och den udda funktionen $\cos(n\Omega t)$ är en udda funktion; om man integrerar sen den udda funktionen $f(t)\cos(n\Omega t)$ på intervallet $[-T/2, T/2]$ får man naturligtvis noll.

3. a) Betrakta funktionen $f(t) = \frac{1}{2}e^{-|t|}$. Enligt (F19)

$$\mathcal{F}[f(t)] = \mathcal{F}\left[\frac{1}{2}e^{-|t|}\right] = \frac{1}{\omega^2+1}$$

så enligt symmetriformeln (F10) följer det att

$$\mathcal{F}\left[\widehat{f}(t)\right] = \mathcal{F}\left[\frac{1}{t^2+1}\right] = 2\pi f(-\omega) = \pi e^{-|-\omega|} = \pi e^{-|\omega|}.$$

b) Enligt a)

$$\mathcal{F}\left[\frac{1}{t^2+1}\right] = \pi e^{-|\omega|}.$$

Eftersom

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{t^2+1}\right) = -\frac{2t}{(t^2+1)^2},$$

så har vi enligt (F11) att

$$\mathcal{F}\left[\frac{t}{(t^2+1)^2}\right] = -\frac{1}{2}\mathcal{F}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{t^2+1}\right)\right] \overset{\text{(F11)}}{=} -\frac{1}{2}i\omega\cdot\pi e^{-|\omega|} = -\frac{i\pi\omega}{2}e^{-|\omega|}.$$

4. Betrakta funktionen

$$\widehat{f}(\omega) = \frac{1}{\omega^2+4}$$

Formeln (F19) på formelbladet visar att den inversa Fouriertransformen $f(t)$ för $\widehat{f}(\omega)$ är

$$f(t) = \frac{1}{4}e^{-2|t|}.$$

Tillämpar vi Plancherel ("baklänges") till f och $\widehat{f}$ får vi

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{(\omega^2+4)^2} = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{16} e^{-4|t|}\,dt \overset{f \text{ är jämn}}{=} \frac{\pi}{8} \cdot 2 \int_0^{\infty} e^{-4t}\,dt = \frac{\pi}{4}\left[\frac{e^{-4t}}{-4}\right]_0^{\infty} = \frac{\pi}{4}\left(0 - \frac{1}{-4}\right) = \frac{\pi}{16}.$$

5. Om $\mathcal{L}[x(t)] = X(s)$ samt $\mathcal{L}[y(t)] = Y(s)$ så får vi enligt (L7) och (L8)

$$\mathcal{L}[x'(t)] = sX(s), \;\; \mathcal{L}[y'(t)] = sY(s),$$

samt

$$\mathcal{L}[t] \overset{\text{(L16)}}{=} \frac{1}{s^2}.$$

Laplacetransformen förvandlar således vårt BVP till följande linjär system av ekvationer för obekanta $X(s), Y(s)$:

$$sX(s) + Y(s) = \frac{1}{s^2}, \quad X(s) + sY(s) = 0.$$

Lösningen (via Gauss eller annan elimination) är

$$X(s) = \frac{1}{s(s^2-1)}, \quad Y(s) = \frac{-1}{s^2(s^2-1)}.$$

Det återstår att hitta inversa Laplacetransformer för $X(s)$ och $Y(s)$. Detta görs genom PBU:

$$X(s) = \frac{1}{s(s-1)(s+1)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s-1} + \frac{C}{s+1} \overset{\text{handpåläggning}}{=} -\frac{1}{s} + \frac{1}{2}\frac{1}{s-1} + \frac{1}{2}\frac{1}{s+1},$$

så att

$$x(t) \overset{\text{(L13),(L14)}}{=} -1 + \frac{1}{2}e^t + \frac{1}{2}e^{-t}.$$

På liknande sätt får vi

$$Y(s) = -\frac{1}{s^2(s-1)(s+1)} = \frac{1}{s^2} - \frac{1}{2}\frac{1}{s-1} + \frac{1}{2}\frac{1}{s+1},$$

så att

$$y(t) \overset{\text{(L14),(L16)}}{=} t - \frac{1}{2}e^t + \frac{1}{2}e^{-t}.$$

6. Lös differensekvationen

$$x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n = \delta_n, \;\; n = 0, 1, 2, \ldots$$

med begynnelsevillkoren $x_0 = x_1 = 0$.

Om $\mathcal{Z}[\{x_n\}] = X(z)$ då gäller enligt (Z8):

$$\mathcal{Z}[\{x_{n+1}\} = zX(z), \quad \mathcal{Z}[\{x_{n+2}\}] = z^2X(z).$$

Samtidigt

$$\mathcal{Z}[\{\delta_n\}] \overset{\text{(Z10)}}{=} 1.$$

Z-transformeringen förvandlar således ekvationen till följande algebraiska ekvation:

$$z^2X(z) - 2zX(z) + X(z) = 1,$$

vilket ger

$$X(z) = \frac{1}{(z^2-2z+1)} = \frac{1}{(z-1)^2} = \frac{1}{z}\frac{z}{(z-1)^2}.$$

Eftersom

$$\mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{z}{(z-1)^2}\right] \overset{(Z13)}{=} [\{n\}]\,,$$

får vi enligt (Z7)

$$\mathcal{Z}\left[\{(n-1)\,\sigma_{n-1}\}\right] = \frac{1}{z}\,\frac{z}{(z-1)^2} = X(z).$$

Således, följden $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ som löser vår ekvation ges av

$$\{x_n\} = \{(n-1)\sigma_{n-1}\} = \{0, 0, 1, 2, 3, \ldots\}\,.$$

7. Se boken, sid. 245.