Krzysztof Marciniak, ITN
Linköpings universitet
tfn 011-36 33 20
krzma@itn.liu.se

Lösningar för kontrollskrivningen KTR1 i Envariabelanalys I (TNIU 22)
för BI1

2008-11-14 kl. 8.00—10.00

1. a) Enligt en additionsformel för cosinus:

$$\begin{aligned}\cos\left(\tfrac{\pi}{12}\right) &= \cos\left(\tfrac{\pi}{3}-\tfrac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\tfrac{\pi}{3}\right)\cos\left(\tfrac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\tfrac{\pi}{3}\right)\sin\left(\tfrac{\pi}{4}\right) = \\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}\left(1+\sqrt{3}\right).\end{aligned}$$

b) Ekvationen

$$\arcsin x = \arctan(3x)$$

är definierad för $x \in [-1,1]$ ty VL är definierad bara där. Vi ser också att varken -1 eller 1 löser den. Genom att tillämpa tan till bägge led får vi

$$\frac{\sin(\arcsin x)}{\cos(\arcsin x)} = \tan(\arctan 3x)$$

Men, $\tan(\arctan(3x)) = 3x$ oavsett värdet på x medan $\sin(\arcsin x) = x$ och $\cos(\arcsin x) = +\sqrt{1-x^2}$ (använd trigettan) på intervallet $]-1,1[$. Ekvationen antar alltså formen

$$\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = 3x.$$

Kvadrerar vi den får vi

$$\frac{x^2}{1-x^2} = 9x^2$$

eller $x^2 = 9x^2 - 9x^4$ dvs $9x^4 - 8x^2 = 0$ vilket faktoriseras till $9x^2(x^2 - \frac{8}{9}) = 0$ med lösningar $x = 0$, $x = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$ samt $x = \frac{2\sqrt{2}}{3}$. Eftersom tan är injektiv på $]-1,1[$ ser vi att alla dessa lösningar är verkliga (dvs ej falska) lösningar till ekvationen. Man kan se detta grafisk också, se Figur 1 där både $\arcsin x$ och $\arctan(3x)$ är ritade.

2. Funktionen f är definierad enbart på det slutna intervallet $[0,1]$. Vi ser då (rita f) att $D_f = [0,1]$ medan $V_f = [f(0), f(1)] = [7,8]$ ty f är strängt växande på $[0,1]$. Detta betyder att $D_{f^{-1}} = V_f = [7,8]$ medan $V_{f^{-1}} = D_f = [0,1]$. Återstår bara att ta fram formeln för f. För att få denne löser vi ut ekvationen $y = f(x)$ med avseende på y:

$$y = x^2 + 7 \Leftrightarrow x = +\sqrt{y-7} = f^{-1}(y)$$

där $+$ tecknet följer t.ex. ur det att $D_{f^{-1}} = [7,8]$. Således, $f^{-1}(x) = \sqrt{x-7}$.

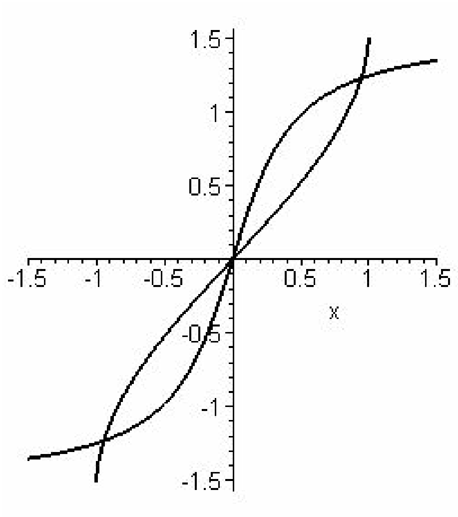

Figure 1:

3. a) Vi faktoriserar täljaren och får

$$\lim_{x\to 7} \frac{x^2-49}{x-7} = \lim_{x\to 7} \frac{(x-7)(x+7)}{x-7} = \lim_{x\to 7}(x+7) = 14.$$

b) Vi använder oss av ett känt standardgränsvärde:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{3x^2}-1}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{3x^2}-1}{3x^2} \cdot 3 = 1\cdot 3 = 3.$$

c) Här är två standardgränsvärden involverade:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin(5x)}{\ln(1+x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\arcsin(5x)}{5x} \cdot \frac{5x}{\ln(1+x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\arcsin(5x)}{5x} \cdot \frac{x}{\ln(1+x)} \cdot 5 = 1 \cdot \frac{1}{1} \cdot 5 = 5$$

4. a) Se boken, def. 3.5 sid. 140.

b) Vi kollar om definitionen i a) är uppfylld:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0} f(x) &= \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{3x+2x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{x}{3x+2x^2} = \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{3+2x} = 1 \cdot \frac{1}{3+0} = \frac{1}{3} \neq \frac{1}{4} = f(0). \end{aligned}$$

Således, funktionen är inte kontinuerlig i 0. I uträkningen använder vi oss av det att $\frac{\sin x}{x} \to 1$ då $x \to 0$.