Krzysztof Marciniak, ITN
Linköpings universitet
tel. 011-36 33 20
krzma@itn.liu.se

# Lösningar till tentamen TEN1 i Envariabelanalys I (TNIU 22) för BI

2008-12-16 kl. 08.00—13.00

1. Vi vet att $V_{f^{-1}} = D_f = [0, \sqrt{\ln 2}]$. Vidare

$$f'(x) = \frac{xe^{x^2}}{\sqrt{e^{x^2}-1}} > 0 \text{ på } D_f \setminus \{0\}$$

vilket visar att $f$ är strängt växande på hela $D_f$. Således, $D_{f^{-1}} = V_f = \left[f(0), f\left(\sqrt{\ln 2}\right)\right] = [0,1]$. Till sist, vi uträknar $f^{-1}$ genom att lösa ut $x$ ur sambandet $y = f(x)$ :

$$\begin{aligned} y &= \sqrt{e^{x^2}-1} \Rightarrow y^2 = e^{x^2}-1 \Rightarrow e^{x^2} = y^2+1 \\ &\Rightarrow x^2 = \ln\left(y^2+1\right) \Rightarrow x = +\sqrt{\ln(y^2+1)} = f^{-1}(y), \end{aligned}$$

där plustecknet väljs ty $x > 0$ på $D_f$. Således

$$f^{-1}(x) = \sqrt{\ln(x^2+1)}, \quad D_{f^{-1}} = [0,1], \quad V_{f^{-1}} = [0, \sqrt{\ln 2}].$$

2. a) Vi vet att

$$a^n - b^n = (a-b)\left(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1}\right)$$

(testa formeln själv genom att explicit uträkna högerledet). Således

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3-1}{x^2-1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)\left(x^2+x+1\right)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x\to 1} \frac{x^2+x+1}{x+1} = \frac{3}{2}.$$

b) Vi förlänger uttrycket med dess konjugat:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+2x} - \sqrt{x^2-2x}\right) &= \lim_{x\to\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2+2x} - \sqrt{x^2-2x}\right)\left(\sqrt{x^2+2x} + \sqrt{x^2-2x}\right)}{\left(\sqrt{x^2+2x} + \sqrt{x^2-2x}\right)} = \\ &= \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+2x-\left(x^2-2x\right)}{\left(\sqrt{x^2+2x} + \sqrt{x^2-2x}\right)} = \lim_{x\to\infty} \frac{4x}{\left(\sqrt{x^2+2x} + \sqrt{x^2-2x}\right)} = \\ &= \lim_{x\to\infty} \frac{4}{\left(\sqrt{1+\frac{2}{x}} + \sqrt{1-\frac{2}{x}}\right)} = 2. \end{aligned}$$

c) Vi skriver om uttrycket som en produkt av tre standardgränsvärden:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin(x^2)}{\sin x \cdot \arctan x} = \lim_{x\to 0} \frac{\arcsin(x^2)}{x^2} \cdot \frac{x}{\sin x} \cdot \frac{x}{\arctan x} = 1\cdot 1\cdot 1 = 1.$$

3. Ur derivatans definition får vi

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{\sin(h^2)}{h}-0}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sin\left(h^2\right)}{h^2}=1.$$

4. a) Se boken, sid. 187 (Sats 4.3).

   b) Vi använder kedjeregeln:

   i)
$$\frac{d}{dx}\left(\cos\left(\frac{1}{1+x^2}\right)\right)=-\sin\left(\frac{1}{1+x^2}\right)\cdot\left(-\frac{1}{(1+x^2)^2}\right)\cdot 2x=\frac{2x}{(1+x^2)^2}\sin\left(\frac{1}{1+x^2}\right).$$

   ii)
$$\frac{d}{dx}\ln\left|x+\sqrt{x^2+7}\right|=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+7}}\left(1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2+7}}\right)=\frac{1}{\sqrt{x^2+7}},$$

   vilket avspeglar naturligtvis det faktum att
$$\int\frac{1}{\sqrt{x^2+a}}\,dx=\ln\left|x+\sqrt{x^2+a}\right|+C.$$

5. Vi noterar först att $D_f=\mathbb{R}\setminus\{2\}$ dvs att $x\neq 2$. Vidare, $x=0$ är ett enda nollställe. Eftersom
$$\lim_{x\to 2^{\pm}}f(x)=\pm\infty$$
(notera teckenuppsättning) ser vi att linjen $x=2$ är en vertikal asymptot till $f$. Horisontella asymptoter saknas, ty $\lim_{x\to\pm\infty}f(x)=\pm\infty$. Vi testar för existens av en sned asymptot vid $+\infty$:
$$\begin{aligned}k&=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x-2}=1\\ m&=\lim_{x\to\infty}(f(x)-kx)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{x-2}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{x-2}=2\end{aligned}$$
vilket betyder att linjen $y=x+2$ är en sned asymptot till $f$ vid $+\infty$. Detta syns även om vi inser att funktionen (efter polynomdivision) kan skrivas som
$$f(x)=x+2+\frac{4}{x-2}.$$
Samma uträkning visar att $y=x+2$ är funktionens asymptot även vid $-\infty$. Dags att derivera (använd gärna formen ovan). Vi får:
$$f'(x)=\frac{x(x-4)}{(x-2)^2}$$
samt
$$f''(x)=\frac{8}{(x-2)^3}$$
Teckentabell (gör den!) visar då att $x=0$ är en lokal maximipunkt, $x=4$ är en lokal minimipunkt, att funktionen växer på $]-\infty,0[$ samt $]4,\infty[$ och avtar på $]0,2[$ samt på $]2,4[$. Den visar också att funktionen är konkav mellan $-\infty$ och 2 och konvex mellan 2 och $\infty$. Samlar vi ihop all information vi fick om funktionen kommer vi fram till funktionens graf som på Figure 1 (här ritad tillsammans med bägge asymptoter).

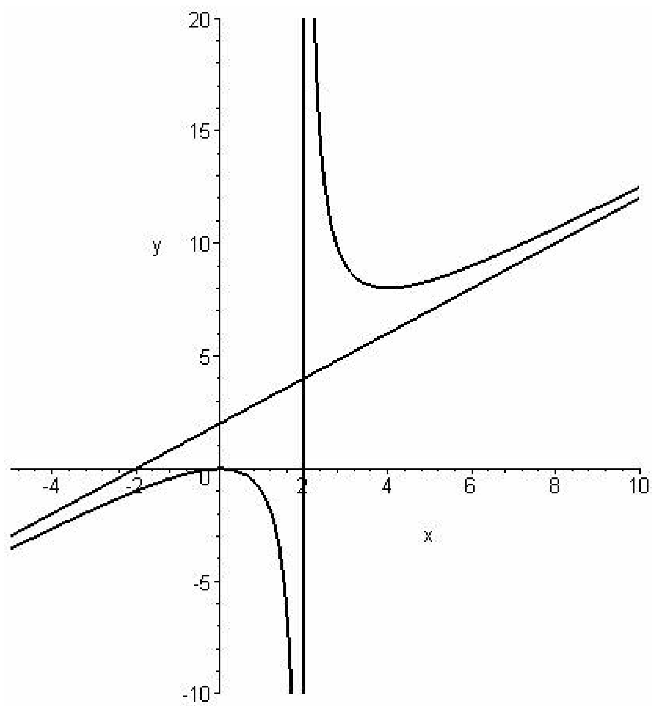


Figure 1:

6. Eulers formler ger:

$$\begin{aligned}
\sin x \cos 5x &= \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \cdot \frac{e^{5ix} + e^{-5ix}}{2} = \frac{1}{4i}\left(e^{6ix} + e^{-4ix} - e^{4ix} - e^{-6ix}\right) = \\
&= \frac{1}{2}(\sin 6x - \sin 4x).
\end{aligned}$$

7. a) Se boken sid. 241 (Def. 5.1).

   b)

   i) Vi ser att integrandens täljare är upp till en konstant lika med derivatan av nämnaren, således

$$\int \frac{x}{1+4x^2}\,dx = \frac{1}{8}\int \frac{8x}{1+4x^2}\,dx = \frac{1}{8}\ln\left(1+4x^2\right) + C,$$

(notera att beloppstecknet behövs ej här ty $1 + 4x^2 > 0$). Kontroll:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{8}\ln\left(1+4x^2\right)\right) = \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{1+4x^2} \cdot 8x = \frac{x}{1+4x^2}.$$

ii) Vi patiellintegrerar två gånger; varje gång deriverar vi polynom:

$$\begin{aligned}
\int x^2\cos x\,dx &= \left[\begin{array}{c} f=x^2,\ f'=2x \\ g'=\cos x,\ g=\sin x \end{array}\right] = x^2\sin x - 2\int x\sin x\,dx = \\
&= \left[\begin{array}{c} f=x,\ f'=1 \\ g'=\sin x,\ g=-\cos x \end{array}\right] = x^2\sin x - 2\left(-x\cos x + \int \cos x\,dx\right) = \\
&= x^2\sin x + 2x\cos x - 2\sin x + C.
\end{aligned}$$

Kontroll:

$$\frac{d}{dx}\left(x^2\sin x + 2x\cos x - 2\sin x\right) = 2x\sin x + x^2\cos x + 2\cos x - 2x\sin x - 2\cos x = x^2\cos x.$$