Krzysztof Marciniak, ITN
Linköpings universitet
tel. 011-36 33 20
krzma@itn.liu.se

Lösningar till tentamen TEN1 i Envariabelanalys I (TNIU 22) för BI

2009-08-19 kl. 14.00—19.00

1. a) Gränsvärdet är av typ $\left[\frac{0}{0}\right]$ så både täljaren och nämnaren innehåller - enligt faktorsatsen - samma faktorn $x-1$. Vi måste då utföra en polynomdivision för att faktorisera både täljaren och nämnaren. Ett ekvivalent, men snabbare sätt att göra detta är genom att använda den välkända formeln:

$$a^n - b^n = (a-b)\left(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1}\right), \quad n \in \mathbb{N}$$

som ger

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x^4-1} = \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)\left(x^2+x+1\right)}{(x-1)\left(x^3+x^2+x+1\right)} = \lim_{x\to 1}\frac{x^2+x+1}{x^3+x^2+x+1} = \frac{3}{4}.$$

b) Vi förlänger både täljaren och nämnaren med nämnarens konjugatuttryck:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2}{\sqrt{x^2+5x}-\sqrt{x^2-5x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{2\left(\sqrt{x^2+5x}+\sqrt{x^2-5x}\right)}{\left(\sqrt{x^2+5x}-\sqrt{x^2-5x}\right)\left(\sqrt{x^2+5x}+\sqrt{x^2-5x}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{2\left(\sqrt{x^2+5x}+\sqrt{x^2-5x}\right)}{x^2+5x-(x^2-5x)} = \lim_{x\to\infty}\frac{2\left(\sqrt{x^2+5x}+\sqrt{x^2-5x}\right)}{10x} =$$

$$= \frac{1}{5}\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+5x}+\sqrt{x^2-5x}}{x} = \frac{1}{5}\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{1+\frac{5}{x}}+\sqrt{1-\frac{5}{x}}\right) = \frac{2}{5}.$$

c) Här är två standardgränsvärden gömda:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{\tan x} = \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}\cdot\frac{x}{\sin x}\cdot\cos x = 1\cdot 1\cdot 1 = 1.$$

2. Vi betraktar alltså funktionen $f(x) = e^{\sin x}$ definierad på $D_f = \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$. Vi ser att

$$f'(x) = e^{\sin x}\cos x > 0 \text{ på } \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$$

så att f är strängt växande på D_f och således inverterbar. Dessutom, eftersom f är strängt växande på D_f, värdemängden V_f ges av

$$V_f = [f(-\pi/2), f(0)] = \left[e^{\sin(-\pi/2)}, e^{\sin 0}\right] = \left[e^{-1}, 1\right].$$

Således, $D_{f^{-1}} = V_f = \left[e^{-1}, 1\right]$ medan $V_{f^{-1}} = D_f = \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$. Det återstår att räkna ut f^{-1} genom att lösa ut x ur sambandet $y = f(x)$:

$$y = e^{\sin x} \Rightarrow \sin x = \ln y \Rightarrow x = \arcsin(\ln y) = f^{-1}(y).$$

Således, $f^{-1}(x) = \arcsin(\ln x)$. Notera att $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$ så att inversen till sin är verkligen arcsin här.

3. a) Funktionen f är kontinuerlig i punkten $a \in D_f$ om

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

b) Vi ser att

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{x + x^2}{\sin 3x} = \lim_{x \to 0} \frac{3x}{\sin 3x} \cdot \frac{x + x^2}{3x} = \lim_{x \to 0} \frac{3x}{\sin 3x} \cdot \frac{1 + x}{3} = 1 \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3}.$$

Således, f blir kontinuerlig enbart om $A = \frac{1}{3}$.

4. a) Se boken sid. 187 (Sats 4.3).

b)

i) Enligt kedjeregeln

$$\frac{d}{dx}\left(\arctan\left(e^{\sin x}\right)\right) = \frac{1}{1 + (e^{\sin x})^2} e^{\sin x} \cos x = \frac{e^{\sin x} \cos x}{1 + e^{2 \sin x}}.$$

ii) Här behöver vi både kvotregeln och kedjeregeln:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\ln(\cos x)}{\sqrt{1 - x^2}}\right) = \frac{\frac{1}{\cos x}(-\sin x)\sqrt{1 - x^2} - \ln(\cos x)\frac{1}{2\sqrt{1 - x^2}}(-2x)}{1 - x^2} =$$

$$= \frac{(x^2 - 1)\tan x + x \ln(\cos x)}{(1 - x^2)^{3/2}}.$$

5. a) Se boken sid. 206 (Sats 4.10).

b) Betrakta funktionen $f(x) = \sqrt{1 + x}$ på intervallet $[0, a]$ där $a > 0$. Enligt satsen i a) finns det en punkt $t \in]0, a[$ så att $f(a) - f(0) = f'(t)(a - 0)$ eller

$$\sqrt{1 + a} - 1 = \frac{1}{2\sqrt{1 + t}} a < \frac{a}{2}$$

ty $t > 0$. Således, $\sqrt{1 + a} - 1 < \frac{a}{2}$ eller $\sqrt{1 + a} < 1 + \frac{a}{2}$ vilket bevisar vårt påstående.

6. Om $z = x + iy$ (med både x och y reella) så antar ekvationen formen

$$(x + iy)^2 - 2i(x + iy) + 3 = \mathrm{Re}(x + iy) + 2\,\mathrm{Im}(x + iy)$$

eller

$$x^2 + 2ixy - y^2 - 2ix + 2y + 3 = x + 2y$$

dvs.

$$x^2 - x - y^2 + 3 + i(2xy - 2x) = 0$$

vilket ger följande ekvationssystem:

$$\begin{cases} x^2 - x - y^2 + 3 = 0 \\ 2xy - 2x = 0 \end{cases}$$

eller

$$\begin{cases} x^2 - x - y^2 + 3 = 0 \\ x(y - 1) = 0 \end{cases}$$

Ekvation 2 ger oss att antingen $x = 0$ eller $y = 1$. Om $x = 0$ ger den första ekvationen $y = \pm\sqrt{3}$ vilket betyder att talen $\pm\sqrt{3}i$ är två rötter till ekvationen. Vidare, om vi istället sätter $y = 1$ i den första ekvationen får vi $x^2 - x + 2 = 0$ som saknar reella lösningar. Således, $\pm\sqrt{3}i$ är samtliga rötter till vår ekvation.

7. a) Naturligtvis

$$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}\, dx = 2\sqrt{f(x)} + C$$

.

ty enligt kedjeregeln

$$\left(2\sqrt{f(x)}\right)' = 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{f(x)}} f'(x).$$

b) Vi får enligt a)

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{x^4 + 1}}\, dx = \frac{1}{4} \int \frac{4x^3}{\sqrt{x^4 + 1}}\, dx = \frac{1}{4} \cdot 2\sqrt{x^4 + 1} + C = \frac{1}{2}\sqrt{x^4 + 1} + C,$$

vilket kan lätt kontrolleras genom att derivera resultatet.