Krzysztof Marciniak, ITN
Linköpings universitet
tel. 011-36 33 20
krzma@itn.liu.se

Lösningar till tentamen TEN1 i Envariabelanalys (TNIU 70) för BI

2008-12-16 kl. 08.00—13.00

1. Vi vet att $V_{f^{-1}} = D_f = [0, \sqrt{\ln 2}]$. Vidare
$$f'(x) = \frac{xe^{x^2}}{\sqrt{e^{x^2}-1}} > 0 \text{ på } D_f \setminus \{0\}$$
vilket visar att f är strängt växande på hela D_f. Således, $D_{f^{-1}} = V_f = \left[f(0), f\left(\sqrt{\ln 2}\right)\right] = [0,1]$. Till sist, vi uträknar f^{-1} genom att lösa ut x ur sambandet $y = f(x)$:
$$\begin{aligned} y &= \sqrt{e^{x^2}-1} \Rightarrow y^2 = e^{x^2}-1 \Rightarrow e^{x^2} = y^2+1 \\ &\Rightarrow x^2 = \ln\left(y^2+1\right) \Rightarrow x = +\sqrt{\ln(y^2+1)} = f^{-1}(y), \end{aligned}$$
där plustecknet väljs ty $x > 0$ på D_f. Således
$$f^{-1}(x) = \sqrt{\ln(x^2+1)}, \quad D_{f^{-1}} = [0,1], \quad V_{f^{-1}} = [0, \sqrt{\ln 2}].$$

2. a) Vi vet att
$$a^n - b^n = (a-b)\left(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1}\right)$$
(testa formeln själv genom att explicit uträkna högerledet). Således
$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3-1}{x^2-1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)\left(x^2+x+1\right)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x\to 1} \frac{x^2+x+1}{x+1} = \frac{3}{2}.$$

b) Vi förlänger uttrycket med dess konjugat:
$$\begin{aligned} \lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+2x} - \sqrt{x^2-2x}\right) &= \lim_{x\to\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2+2x} - \sqrt{x^2-2x}\right)\left(\sqrt{x^2+2x} + \sqrt{x^2-2x}\right)}{\left(\sqrt{x^2+2x} + \sqrt{x^2-2x}\right)} = \\ &= \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+2x-\left(x^2-2x\right)}{\left(\sqrt{x^2+2x} + \sqrt{x^2-2x}\right)} = \lim_{x\to\infty} \frac{4x}{\left(\sqrt{x^2+2x} + \sqrt{x^2-2x}\right)} = \\ &= \lim_{x\to\infty} \frac{4}{\left(\sqrt{1+\frac{2}{x}} + \sqrt{1-\frac{2}{x}}\right)} = 2. \end{aligned}$$

c) Vi skriver om uttrycket som en produkt av tre standardgränsvärden:
$$\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin(x^2)}{\sin x \cdot \arctan x} = \lim_{x\to 0} \frac{\arcsin(x^2)}{x^2} \cdot \frac{x}{\sin x} \cdot \frac{x}{\arctan x} = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1.$$

3. Ur derivatans definition får vi

$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{\sin(h^2)}{h} - 0}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\sin\left(h^2\right)}{h^2} = 1.$$

4. a) Se boken, sid. 187 (Sats 4.3).

   b) Vi använder kedjeregeln:

   i)
$$\frac{d}{dx}\left[\cos\left(\frac{1}{1+x^2}\right)\right] = -\sin\left(\frac{1}{1+x^2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{(1+x^2)^2}\right) \cdot 2x = \frac{2x}{(1+x^2)^2}\sin\left(\frac{1}{1+x^2}\right).$$

   ii)
$$\frac{d}{dx}\ln\left|x + \sqrt{x^2+7}\right| = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+7}}\left(1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2+7}}\right) = \frac{1}{\sqrt{x^2+7}},$$

   vilket avspeglar naturligtvis det faktum att

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}}\,dx = \ln\left|x + \sqrt{x^2+a}\right| + C.$$

5. Vi noterar först att $D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$ dvs att $x \neq 2$. Vidare, $x = 0$ är ett enda nollställe. Eftersom

$$\lim_{x \to 2^{\pm}} f(x) = \pm\infty$$

(notera teckenuppsättning) ser vi att linjen $x = 2$ är en vertikal asymptot till f. Horisontella asymptoter saknas, ty $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$. Vi testar för existens av en sned asymptot vid $+\infty$:

$$\begin{aligned} k &= \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{x}{x-2} = 1 \\ m &= \lim_{x \to \infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{x^2}{x-2} - x\right) = \lim_{x \to \infty} \frac{2x}{x-2} = 2 \end{aligned}$$

vilket betyder att linjen $y = x + 2$ är en sned asymptot till f vid $+\infty$. Detta syns även om vi inser att funktionen (efter polynomdivision) kan skrivas som

$$f(x) = x + 2 + \frac{4}{x-2}.$$

Samma uträkning visar att $y = x + 2$ är funktionens asymptot även vid $-\infty$. Dags att derivera (använd gärna formen ovan). Vi får:

$$f'(x) = \frac{x(x-4)}{(x-2)^2}$$

samt

$$f''(x) = \frac{8}{(x-2)^3}$$

Teckentabell (gör den!) visar då att $x = 0$ är en lokal maximipunkt, $x = 4$ är en lokal minimipunkt, att funktionen växer på $]-\infty, 0[$ samt $]4, \infty[$ och avtar på $]0, 2[$ samt på $]2, 4[$. Den visar också att funktionen är konkav mellan $-\infty$ och 2 och konvex mellan 2 och ∞. Samlar vi ihop all information vi fick om funktionen kommer vi fram till funktionens graf som på Figure 1 (här ritad tillsammans med bägge asymptoter).

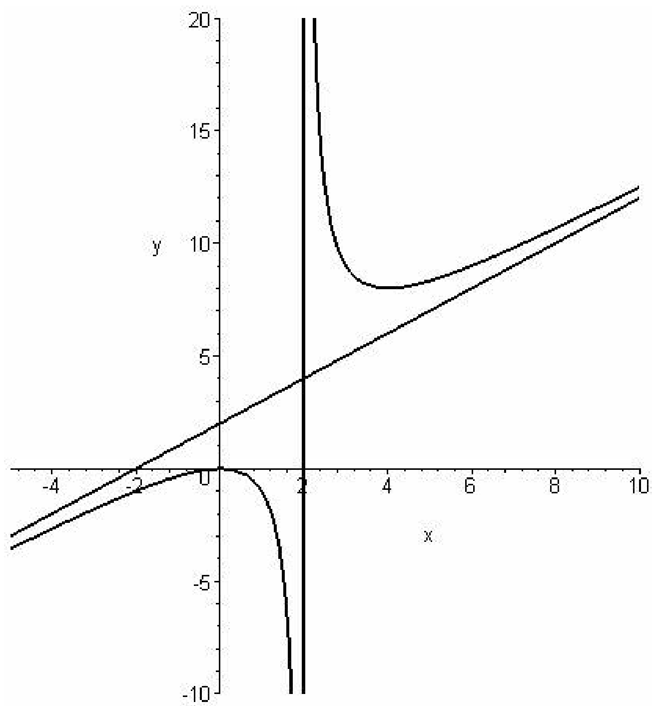

Figure 1:

6. Eulers formler ger:

$$\begin{aligned}\sin x \cos 5x &= \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \cdot \frac{e^{5ix} + e^{-5ix}}{2} = \frac{1}{4i}\left(e^{6ix} + e^{-4ix} - e^{4ix} - e^{-6ix}\right) = \\ &= \frac{1}{2}\left(\sin 6x - \sin 4x\right).\end{aligned}$$

7. a) Se boken sid. 206 (Sats 4.10).

   b) Enligt medelvärdessatsen för derivator vet vi att den sökta punkter säkert existerar. Rita nu en bra figur för att förstå uppgiften. Linjen som förenar punkterna $(1, f(1))$ och $(2, f(2))$ har lutningen

$$\frac{f(2) - f(1)}{2 - 1} = \frac{\frac{1}{2} - 1}{2 - 1} = -\frac{1}{2}.$$

   Vi letar alltså efter en punkt t där $f'(t) = -\frac{1}{2}$. Men $f'(t) = -\frac{1}{t^2}$ och således $f'(t) = -\frac{1}{2}$ för $t^2 = 2$ eller för $t = \sqrt{2} \in [1, 2]$ (den andra lösningen ligger utanför intervallet $[1, 2]$ och därför kastas). Notera att i detta fall existerar bara en sådan punkt.