Krzysztof Marciniak, ITN
Linköpings universitet
tel. 011-36 33 20
krzma@itn.liu.se

Lösningar till tentamen TEN1 i Envariabelanalys (TNIU 70)
för BI
2009-04-15 kl. 08.00—13.00

1. a) Gränsvärdet är av typ $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$. Vi delar både täljaren och nämnaren med den term som dominerar nämnaren då $x \to \infty$ dvs med x^2:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+2x-8}{x^2+5x-14} = \lim_{x\to\infty} \frac{1+\frac{2}{x}-\frac{8}{x^2}}{1+\frac{5}{x}-\frac{14}{x^2}} = 1.$$

då både $\frac{1}{x}$ och $\frac{1}{x^2}$-termerna går mot noll.

b) Kring 2 blir uttrycket av typ $\left[\frac{0}{0}\right]$. Faktorsatsen säger då att både täljaren och nämnaren innehåller faktorn $x-2$:

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2+2x-8}{x^2+5x-14} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x+4)}{(x-2)(x+7)} = \lim_{x\to 2} \frac{x+4}{x+7} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}.$$

c) Naturligtvis $\sin x \to 0$ då $x \to 0$ och därför

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{\sin x}-1}{\cos x} = \frac{0}{1} = 0.$$

2. a) Se boken sid. 68.

b) Tyvärr blev det fel i uppgiften ty min avsikt var att ni skulle beräkna $g \circ f$ på $\left[-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi\right]$ vilket ger

$$(g \circ f)(x) = g(f(x) = \arcsin(\ln e^{\sin x}) = \arcsin(\sin x) = x$$

just pga $x \in \left[-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi\right]$ dvs pga att x ligger i det intervallet där sin är inversen till arcsin. Detta visar att $g = f^{-1}$ på det angivna intervallet. På tentan blev ni dock frågade att ta fram sammansättningen $f \circ g$ som kan räknas ut så här

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \exp\left(\sin(\arcsin(\ln x))\right)$$

vilket är x bara då $\ln x \in D_{\arcsin} = [-1, 1]$ dvs för $x \in \left[e^{-1}, e\right]$ men absolut ej för $x \in \left[-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi\right]$. Svaret är alltså:

$$(f \circ g)(x) = \begin{cases} x \text{ för } x \in \left[e^{-1}, e\right] \\ \text{odefinerad annars} \end{cases}$$

3. a) Antag att f är deriverbar i $a \in D_f$. Vi har då att

$$\lim_{x\to a} f(x) - f(a) = \lim_{x\to a} (f(x) - f(a)) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}(x-a) = f'(a) \cdot 0 = 0$$

så att f är kontinuerlig i a.

b) Funktionen

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\arcsin 2x}{3x} & \text{för } x \neq 0 \\ 1 & \text{för } x = 0 \end{cases}$$

kan ej vara deriverbar i 0 ty den är ej kontinuerlig där:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\arcsin 2x}{3x} = \lim_{x\to 0} \frac{\arcsin 2x}{2x} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3} \neq 1 = f(0).$$

(se a)).

4. Om $z = x + iy$ så är $z\overline{z} = (x+iy)(x-iy) = x^2 + y^2 = |z|^2$. Villkoret $z\overline{z} = \operatorname{Im} z$ kan därför skrivas $x^2 + y^2 = y$ eller $x^2 + (y - \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$ och uppfylles således av alla komplexa tal som ligger på cirkeln med radien $\frac{1}{2}$ och med mittpunkten i $\frac{1}{2}i$.

5. Funktionen f är kontinuerlig (ty det är en polynom) samt definierad på ett kompakt intervall. En känd sats säger då att f antar sitt största samt minsta värde på intervallet. En annan sats informerar oss då att dessa värden antas enbart i stationära punkter, singulära punkter eller intervallets ändpunkter. Singulära punkter saknas ty f är deriverbar överallt. Vi letar då efter stationära punkter. Vi deriverar först:

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 6$$

och ser att $f'(x) = 0$ då $x = 1 \pm \sqrt{3}$. Punkten $x = 1 + \sqrt{3}$ ligger dock utanför D_f. Det återstår alltså att undersöka tre punkter: den stationära punkten $1 - \sqrt{3}$ samt intervallets ändpunkter -1 och 2:

$$\begin{aligned} f(-1) &= 6 \\ f(1-\sqrt{3}) &= -4 + 6\sqrt{3} \\ f(2) &= -12 \end{aligned}$$

och vi kan konstatera att $f_{\max} = -4 + 6\sqrt{3}$ inträffar i punkten $1 - \sqrt{3}$ medan $f_{\min} = -12$ inträffar i punkten 2.

6. a) Se boken sid. 192 (Sats 4.6).

b) Vi ser att $f(0) = 1$ så att $f^{-1}(1) = 0$. Enligt satsen i a) får vi då

$$\left(f^{-1}\right)'(1) = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{3}$$

ty $f'(x) = e^x - \cos x + 3$ så att $f'(0) = 1 - 1 + 3 = 3 \neq 0$.

7. Antar att f är jämn dvs att $f(-x) = f(x)$ för alla x. Vi har då

$$\begin{aligned} f'(-x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(-x+h) - f(-x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x-h) - f(x)}{h} = \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x-h) - f(x)}{-h} \cdot (-1) = -f'(x), \end{aligned}$$

v.s.v. Den som förstår alla dessa steg förstår begreppet derivatan.