

Lösningar till tentamen TEN1 i Envariabelanalys (TNIU 70)
 för BI
 2009-08-19 kl. 14.00—19.00

1. a) Gränsvärdet är av typ $\frac{0}{0}$ så både täljaren och nämnaren innehåller - enligt faktorsatsen - samma faktorn $x - 1$. Vi måste då utföra en polynomdivision för att faktorisera både täljaren och nämnaren. Ett ekvivalent, men snabbare sätt att göra detta är genom att använda den välkända formeln:

$$a^n - b^n = (a - b) \left(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1} \right), \quad n \in \mathbb{N}$$

som ger

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x^4 - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x^2 + x + 1)}{(x - 1)(x^3 + x^2 + x + 1)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x + 1}{x^3 + x^2 + x + 1} = \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

- b) Vi förlänger både täljaren och nämnaren med nämnarens konjugatuttryck:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 5x + 5}{x^2 + 5x} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2 - 5x + 5)(x^2 + 5x)}{(x^2 + 5x)(x^2 + 5x)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 5x^3 + 5x^2}{x^4 + 10x^3 + 5x^2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 5x + 5}{x^2 + 5x} = \frac{1}{5} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 5x + 5}{x} = \frac{1}{5} \lim_{x \rightarrow 1} \left(1 + \frac{5}{x} - 5 \right) = \frac{2}{5}. \end{aligned}$$

- c) Här är två standardgränsvärden gömda:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{\tan x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} \cdot \frac{x}{\sin x} \cdot \cos x = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1.$$

2. Vi betraktar alltså funktionen $f(x) = e^{\sin x}$ definierad på $D_f = \left(-\frac{\pi}{2}, 0 \right)$. Vi ser att

$$f'(x) = e^{\sin x} \cos x > 0 \text{ på } \left(-\frac{\pi}{2}, 0 \right)$$

så att f är strängt växande på D_f och således inverterbar. Dessutom, eftersom f är strängt växande på D_f , värdemängden V_f ges av

$$V_f = [f\left(-\frac{\pi}{2}\right), f(0)] = [e^{\sin(-\pi/2)}, e^{\sin 0}] = [e^{-1}, 1].$$

Således, $D_{f^{-1}} = V_f = \frac{1}{e^{\sin x}}$ medan $V_{f^{-1}} = D_f = \frac{1}{\sin x}$. Det återstår att räkna ut f^{-1} genom att lösa ut x ur sambandet $y = f(x)$:

$$y = e^{\sin x} \Rightarrow \sin x = \ln y \Rightarrow x = \arcsin(\ln y) = f^{-1}(y).$$

Således, $f^{-1}(x) = \arcsin(\ln x)$. Notera att $x \in \left(\frac{1}{e}, 1\right)$ så att inversen till \sin är verkligen \arcsin här.

3. a) Funktionen f är kontinuerlig i punkten $a \in D_f$ om

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

b) Vi ser att

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + x^2}{\sin 3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{\sin 3x} \cdot \frac{x + x^2}{3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{\sin 3x} \cdot \frac{1 + x}{3} = 1 \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3}.$$

Således, f blir kontinuerlig enbart om $A = \frac{1}{3}$.

4. a) Se boken sid. 187 (Sats 4.3).

b)

i) Enligt kedjeregeln

$$\frac{d}{dx} \arctan(e^{\sin x}) = \frac{1}{1 + (e^{\sin x})^2} e^{\sin x} \cos x = \frac{e^{\sin x} \cos x}{1 + e^{2 \sin x}}.$$

ii) Här behöver vi både kvotregeln och kedjeregeln:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left(\frac{\ln(\cos x)}{1 - x^2} \right) &= \frac{\frac{1}{\cos x} (-\sin x) \cdot \frac{1}{1 - x^2} - \ln(\cos x) \cdot \frac{1}{1 - x^2} \cdot (-2x)}{(1 - x^2)^2} = \\ &= \frac{(x^2 - 1) \tan x + x \ln(\cos x)}{(1 - x^2)^{3/2}}. \end{aligned}$$

5. a) Se boken sid. 206 (Sats 4.10).

b) Betrakta funktionen $f(x) = \frac{1}{1+x}$ på intervallet $[0, a]$ där $a > 0$. Enligt satsen i a) ...nns det en punkt $t \in]0, a[$ så att $f(a) - f(0) = f'(t)(a - 0)$ eller

$$\frac{1}{1+a} - 1 = \frac{1}{2} \frac{1}{1+t} a < \frac{a}{2}$$

ty $t > 0$. Således, $\frac{1}{1+a} - 1 < \frac{a}{2}$ eller $\frac{1}{1+a} < 1 + \frac{a}{2}$ vilket bevisar vårt påstående.

6. Om $z = x + iy$ (med både x och y reella) så antar ekvationen formen

$$(x + iy)^2 + 2i(x + iy) + 3 = \operatorname{Re}(x + iy) + 2 \operatorname{Im}(x + iy)$$

eller

$$x^2 + 2ixy - y^2 + 2ix + 2iy + 3 = x + 2iy$$

dvs.

$$x^2 - x + y^2 + 3 + i(2xy - 2x) = 0$$

vilket ger följande ekvationssystem:

$$\begin{cases} x^2 - x + y^2 + 3 = 0 \\ 2xy - 2x = 0 \end{cases}$$

eller

$$\begin{cases} x^2 - x + y^2 + 3 = 0 \\ x(y - 1) = 0 \end{cases}$$

Ekvation 2 ger oss att antingen $x = 0$ eller $y = 1$. Om $x = 0$ ger den första ekvationen $y = \sqrt[3]{-3}$ vilket betyder att talen $\sqrt[3]{-3}i$ är två rötter till ekvationen. Vidare, om vi istället sätter $y = 1$ i den första ekvationen får vi $x^2 - x + 2 = 0$ som saknar reella lösningar. Således, $\sqrt[3]{-3}i$ är samtliga rötter till vår ekvation.

7. Antag att f är udda dvs. att $f(-x) = -f(x)$. Vi skall visa att f' är då en jämn funktion dvs. att $f'(-x) = f'(x)$. Vi gör det direkt med hjälp av derivatans definition:

$$\begin{aligned} f'(-x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-x+h) - f(-x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x-h) + f(x)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x-h) - f(x)}{-h} = f'(x), \end{aligned}$$

v.s.v.