Krzysztof Marciniak, ITN
Linköpings universitet
tel. 011-36 33 20
krzma@itn.liu.se

Lösningar till tentamen TEN1 i Envariabelanalys I (TNIU 22)

för BI

2010-04-07 kl. 08.00—13.00

1. a) Gränsvärdet är av typ $\left[\frac{0}{0}\right]$. Vi använder oss av formeln

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

(där $a, b \in \mathbf{R}$ medan $n \in \mathbf{N}$; kolla det!) med $a = x$, $b = 2$ och $n = 4$. Vi får

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^4 - 16}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)\left(x^3 + 2x^2 + 4x + 8\right)}{x-2} = \lim_{x\to 2} \left(x^3 + 2x^2 + 4x + 8\right) = 32.$$

Vi kan förstås även använda faktorsatsen och visa att

$$x^4 - 16 = (x-2)(x+2)\left(x^2+4\right)$$

vilket leder naturligtvis till samma resultat.

b) Vi använder oss av två standardgränsvärden:

$$\lim_{x\to 0} \left(1+x^2\right)^{\frac{1}{\sin^2 x}} = \lim_{x\to 0} \left[\left(1+x^2\right)^{\frac{1}{x^2}}\right]^{x^2/\sin^2 x} = e^1 = e$$

ty $\left(1+x^2\right)^{\frac{1}{x^2}} \to 1$ medan $\frac{x^2}{\sin^2 x} = \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{-2} \to 1^{-2} = 1$ då $x \to 0$ enligt Sats 3.11.

c) Vi förlänger både täljaren och nämnaren med motsvarande konjugatuttryck:

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2+2x} - \sqrt{x^2-2x}}{\sqrt{3x^2+5x} - \sqrt{3x^2-2x}} \\
= &\lim_{x\to\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2+2x} - \sqrt{x^2-2x}\right)\left(\sqrt{x^2+2x} + \sqrt{x^2-2x}\right)\left(\sqrt{3x^2+5x} + \sqrt{3x^2-2x}\right)}{\left(\sqrt{3x^2+5x} - \sqrt{3x^2-2x}\right)\left(\sqrt{3x^2+5x} + \sqrt{3x^2-2x}\right)\left(\sqrt{x^2+2x} + \sqrt{x^2-2x}\right)} = \\
= &\lim_{x\to\infty} \frac{4x\left(\sqrt{3x^2+5x} + \sqrt{3x^2-2x}\right)}{7x\left(\sqrt{x^2+2x} + \sqrt{x^2-2x}\right)} = \frac{4}{7} \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{3+\frac{5}{x}} + \sqrt{3-\frac{2}{x}}}{\sqrt{1+\frac{2}{x}} + \sqrt{1-\frac{2}{x}}} = \frac{4}{7} \cdot \frac{2\sqrt{3}}{2} = \frac{4\sqrt{3}}{7}.
\end{aligned}$$

2. a) $f'(x) = 5x^4 + 3x^2 + 1 > 0$ på hela D_f och således är f strängt växande och därmed inverterbar.

b) $V_{f^{-1}} = D_f = [0, 2]$ medan $D_{f^{-1}} = V_f = [f(0), f(2)] = [0, 42]$ ty f är s.v. enligt a).

c) Vi ser att $f(1) = 3$ så, enligt Sats 4.6 sid.192 (satsen om derivatan av invers funktion):

$$\left(f^{-1}\right)'(3) = \frac{1}{f'(1)} = \left.\frac{1}{5x^4 + 3x^2 + 1}\right|_{x=1} = \frac{1}{9}.$$

3. a) En funktion f är kontinuerlig i $a \in D_f$ om $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$. Vi kollar således om funktionen

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 \sin\frac{1}{x}}{\sin x} & \text{för } x \neq 0 \\ \\ 0 & \text{för } x = 0 \end{cases}$$

uppfyller detta villkor i $a = 0$:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 \sin\frac{1}{x}}{\sin x} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{x}{\sin x} \cdot x \sin\frac{1}{x} \right) = 1 \cdot 0 = 0 = f(0)$$

(enligt ett standardgränsvärde + Sats 3.1 sid. 131, $\sin\frac{1}{x}$ är nämligen begränsad nära 0) så att f är kontinuerlig i 0.

b) Vi kollar deriverbarheten direkt ur derivatans definition. Vi får

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{h^2 \sin\frac{1}{h}}{\sin h}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h \sin\frac{1}{h}}{\sin h} = \lim_{h\to 0} \frac{h}{\sin h} \cdot \sin\frac{1}{h}$$

vilket existerar ej ty förvisso $\frac{h}{\sin h} \to 1$ med $\sin\frac{1}{h}$ saknar gränsvärde då $h \to 0$. Funktionen är således kontinuerlig men ej deriverbar i 0 (titta nu på Sats 4.1 sid. 180 och fundera över detta).

4. Ekvationen

$$\arcsin x = \arctan(\pi x)$$

är definierad enbart om $x \in [-1, 1]$ ty $D_{\arcsin} = [-1, 1]$ medan $D_{\arctan} = \mathbf{R}$. Vi vet att $HL \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ medan $VL \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Det betyder att $HL = VL \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. Vi beräknar nu ledvis tan av båda led och får

$$\frac{\sin(\arcsin x)}{\cos(\arcsin x)} = \tan(\arctan(\pi x))$$

eller (eftersom $\cos(\arcsin x) = +\sqrt{1 - \sin^2(\arcsin x)} = \sqrt{1 - x^2}$)

$$\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} = \pi x$$

vilket ger

$$x \left(\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} - \pi \right) = 0.$$

så att antingen $x = 0$ (sann rot, lätt att kolla genom att sätta in 0 i ekvationen) eller

$$\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} = \pi$$

vilket ger

$$x = \pm\sqrt{1 - \frac{1}{\pi^2}}$$

och bägge dessa rötter är sanna. Således, ekvationen har exakt tre rötter: 0 och $\pm\sqrt{1 - \frac{1}{\pi^2}}$.

5. Deriverar vi $f(x) = e^{-x^2}$ två gånger får vi

$$f''(x) = 2e^{-x^2}\left(2x^2 - 1\right)$$

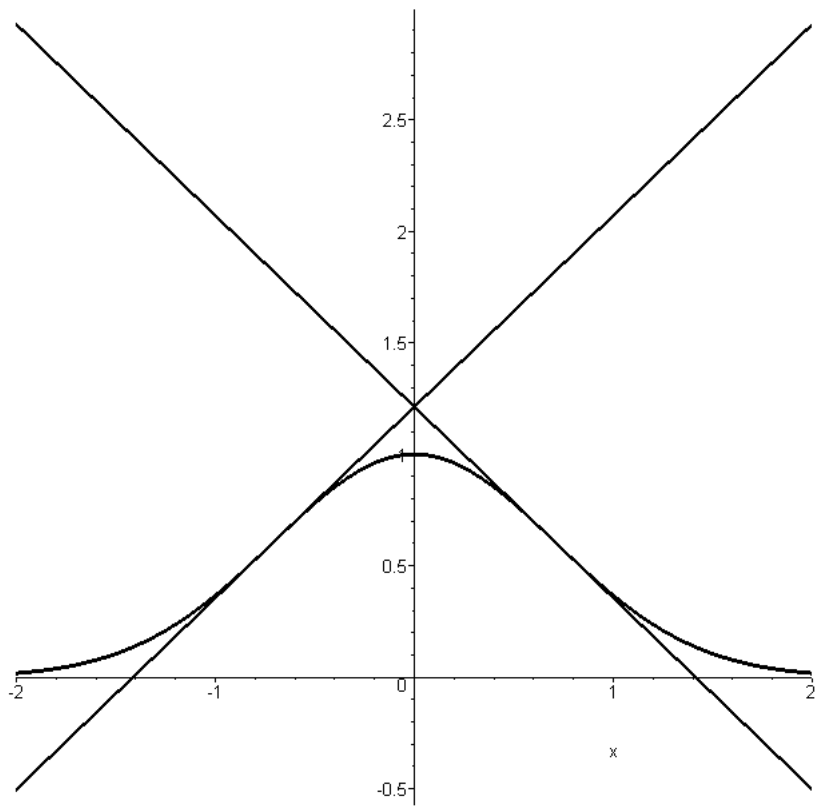
som är noll då och endast då $2x^2 - 1 = 0$ dvs. för $x_{1,2} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$. Teckenstudium (gör det) visar att bägge dessa punkter är inflektionspunkter (punkter där funktionen byter från konvex till konkav eller tvärtom). Betrakta först $x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Eftersom $f(x_1) = e^{-1/2}$ medan $f'(x_1) = -\sqrt{2}e^{-1/2}$, tangenten vid x_1 till f:s graf är den räta linjen

$$y = e^{-1/2} - \sqrt{2}e^{-1/2}\left(x - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\sqrt{2}e^{-1/2}x + 2e^{-1/2}.$$

På liknande sätt (eller genom att utnyttja kurvans symmetri, funktionen är ju jämn) visar vi att tangenten till f:s graf i x_2 är den räta linjen

$$y = e^{-1/2} + \sqrt{2}e^{-1/2}\left(x - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}e^{-1/2}x + 2e^{-1/2}.$$

Funktionen f samt de två tangentlinjer som vi just nu hittat visas i Figure 1.



6. Vi ser att $z_1 = 1$ är en (reell) rot till ekvationen. Faktorsatsen och polynomdivision leder då till

$$z^3 + z^2 - 2 = (z - 1)(z^2 + 2z + 2)$$

Det betyder att ekvationen är även uppfylld om $z^2 + 2z + 2 = 0$ dvs. om (kvadratkomplettering) $(z+1)^2 + 1 = 0$ som har två komplex konjugerade lösningar $z_{2,3} = -1 \pm i$.

7. **Metod I**: via Eulers formler:

$$\sin^2 x = \left[\frac{1}{2i}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right)\right]^2 = -\frac{1}{4}\left(e^{2ix} - 2 + e^{-2ix}\right)$$

så att

$$\begin{aligned}\int \sin^2 x\,dx &= -\frac{1}{4}\int \left(e^{2ix} - 2 + e^{-2ix}\right)\,dx = -\frac{1}{4}\left(\frac{e^{2ix}}{2i} - 2x - \frac{e^{-2ix}}{2i}\right) + C = \\ &= \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\sin 2x + C.\end{aligned}$$

Metod II: via det trigonometriska identitetet

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

vilket ger

$$\int \sin^2 x\,dx = \int \frac{1 - \cos 2x}{2}\,dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\sin 2x + C.$$

Metod III: via partiellintegration:

$$\begin{aligned}\int \sin^2 x\,dx &= \int \sin x \sin x\,dx = \left[\begin{array}{c} f' = \sin x,\ f = -\cos x \\ g = \sin x,\ g' = \cos x \end{array}\right] = -\sin x\cos x + \int \cos^2 x\,dx = \\ &= -\sin x\cos x + \int \left(1 - \sin^2 x\right)\,dx = -\sin x\cos x + x - \int \sin^2 x\,dx\end{aligned}$$

så att

$$2\int \sin^2 x\,dx = x - \sin x\cos x + D.$$

eller

$$\begin{aligned}\int \sin^2 x\,dx &= \frac{x}{2} - \frac{1}{2}\sin x\cos x + \frac{D}{2} = \\ &= \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\sin 2x + C.\end{aligned}$$