Krzysztof Marciniak, ITN
Linköpings universitet
tel. 011-36 33 20
krzma@itn.liu.se

Lösningar till tentamen TEN1 i Envariabelanalys I (TNIU 22)

för BI

2010-08-23 kl. 14.00—19.00

1. a) Vi utnyttjar det att för $x \geq 0$ gäller att $1 - x = (1 - \sqrt{x})(1 + \sqrt{x})$:

$$\lim_{x\to 1} \frac{1-\sqrt{x}}{1-x} = \lim_{x\to 1} \frac{1-\sqrt{x}}{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})} = \lim_{x\to 1} \frac{1}{1+\sqrt{x}} = \frac{1}{2}$$

b) Den term som dominerar nämnaren då $x \to \infty$ är förstås x så vi delar både täljaren och nämnaren med just x:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x + \sin x + \sqrt{x}}{2x + \cos x + \sqrt{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1 + \frac{\sin x}{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}}{2 + \frac{\cos x}{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}} = \frac{1}{2}$$

ty termerna $\frac{\sin x}{x}$, $\frac{\cos x}{x}$ och $\frac{1}{\sqrt{x}}$ går alla mot noll då $x \to \infty$.

c) Vi faktoriserar uttrycket i en produkt av standardgränsvärden:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x \, \tan 2x}{\sin 3x \, \tan 4x} = \lim_{x\to 0} \left[\frac{\sin x}{x} \cdot \frac{3x}{\sin 3x} \cdot \frac{\tan 2x}{2x} \cdot \frac{4x}{\tan 4x} \cdot \frac{1}{6} \right] = \frac{1}{6}$$

(notera den kompenserande faktorn $\frac{1}{6}$).

2. Metod 1: Vi utnyttjar Eulers formler:

$$\begin{aligned} \sin^2 x \cos^2 x &= \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^2 \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^2 = -\frac{1}{16}\left[\left(e^{ix} - e^{-ix}\right)\left(e^{ix} + e^{-ix}\right)\right]^2 = \\ &= -\frac{1}{16}\left(e^{2ix} - e^{-2ix}\right)^2 = -\frac{1}{16}\left(e^{4ix} - 2 + e^{4ix}\right) = \frac{1}{8} - \frac{1}{8}\cos 4x. \end{aligned}$$

Metod 2. Vi utnyttjar några trigonometriska formler:

$$1 - \cos 4x \overset{\text{cos av dubbla vinkeln}}{=} 1 - \cos^2 2x + \sin^2 2x = \overbrace{\sin^2 2x + \cos^2 2x}^{=1 \text{ (trigettan)}} - \cos^2 2x + \sin^2 2x =$$

$$= 2\sin^2 2x \overset{\text{sin av dubbla vinkeln}}{=} 2(2\sin x \cos x)^2 = 8\sin^2 x \cos^2 x$$

så att

$$\frac{1}{8}(1 - \cos 4x) = \sin^2 x \cos^2 x.$$

3. a) Se boken, formeln (4.1) sid. 177.

   b) Enligt definitionen av derivatan

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\frac{x+h+1}{x+h-2}-\frac{x+1}{x-2}\right) = \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\cdot\frac{(x+h+1)\,(x-2)-(x+1)(x+h-2)}{(x+h-2)(x-2)} = \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\cdot\frac{-3h}{(x+h-2)(x-2)} = \lim_{h\to 0}\frac{-3}{(x+h-2)(x-2)} = \\ &= \frac{-3}{(x-2)^2} \end{aligned}$$

   som kan lätt kontrolleras genom att derivera f med kvotregeln eller på annat sätt.

4. a) Det räcker att visa att $f' > 0$ på $D_f = [-1, 1]$ vilket är självklart ty

$$f'(x) = 3x^2 + e^x > 0.$$

   Funktionen är således strängt växande på D_f och alltså inverterbar (se sid. 76 i boken).

   b) Naturligtvis, $V_{f^{-1}} = D_f = [-1, 1]$. Vidare, eftersom funktionen f är strängt växande,

$$D_{f^{-1}} = V_f = [f(-1), f(1)] = \left[e^{-1}-1, e+1\right].$$

   c) Notera att $1 = f(0)$ så att enligt satsen om derivatan av inversa funktionen (Sats 4.6 sid. 192)

$$\left(f^{-1}\right)'(1) = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{3\cdot 0^2+e^0} = 1.$$

5. a) Se boken, Sats 4.3, sid. 187.

   b) Vi använder kedjeregeln i båda fall:

   i)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\ln\left(1+\sqrt{1-x^2}\right) &= \frac{1}{\left(1+\sqrt{1-x^2}\right)}\cdot\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}\cdot(-2x) = \\ &= -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}\left(1+\sqrt{1-x^2}\right)} = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}+1-x^2} \end{aligned}$$

   ii)

$$\frac{d}{dx}\arctan\left(e^{x^2}\right) = \frac{1}{1+e^{2x^2}}\cdot e^{x^2}\cdot 2x = \frac{2xe^{x^2}}{1+e^{2x^2}}$$

6. Funktionen $f(x) = \ln(2+x) - 2\arctan(x)$ är kontinuerligt och intervallet $D_f = [-1, 0]$ är kompakt (dvs. slutet /=innehåller alla sina ändpunkter/ och begränsad) så vi vet att f antar både $f_{\max}$ och $f_{\min}$ på D_f. Dessa extremvärden kan dessutom antas endast vid tre typer av punkter: stationära punkter, singulära punkter eller intervallets ändpunkter. Singulära punkter saknas, ändpunkterna är -1 och 0. Det återstår då att hitta stationära punkter dvs. punkter där f' är noll:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2+x} - \frac{2}{1+x^2} = \frac{1+x^2-2(2+x)}{(2+x)\,(1+x^2)} = \\ &= \frac{x^2-2x-3}{(2+x)\,(1+x^2)} \end{aligned}$$

så att $f'(x) = 0$ om och endast om $x^2 - 2x - 3 = 0$ vilket ger två rötter: 3 och -1. Den första ligger utanför D_f medan den andra sammanfaller med den vänstra ändpunkten. Det återstår alltså att jämföra funktionens värden i -1 och 0:

$$f(-1) = \ln 1 - 2\arctan(-1) = \text{ /vi utnyttjar det att arctan är udda/ } = 2\arctan 1 = \frac{\pi}{2} \approx 1.570\,8$$

$$f(0) = \ln 2 \approx 0.69315$$

så att $f_{\max} = \frac{\pi}{2}$ antas i $x = -1$ medan $f_{\min} = \ln 2$ antas i $x = 0$.

7. a) Se boken, Sats 5.4 sid. 246.

b)

i) Vi partiellintegrerar två gånger, varje gång väljer vi att derivera polynom. Proceduren är standard:

$$\begin{aligned} \int x^2 \sin x \; dx &= -x^2\cos x + 2\int x\cos x\, dx = -x^2\cos x + 2x\sin x - 2\int \sin x\, dx = \\ &= -x^2\cos x + 2x\sin x + 2\cos x + C. \end{aligned}$$

ii) Vi förlänger integranden med 1 och partiellintegrerar

$$\int \arcsin x\, dx = \int 1\cdot \arcsin x\, dx = x\arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C$$

(derivera $\sqrt{1-x^2}$ om du inte ser det).