Krzysztof Marciniak, ITN
Linköpings universitet
tel. 011-36 33 20
krzma@itn.liu.se

Lösningar till tentamen TEN1 i Envariabelanalys (TNIU 70)
för BI
2009-12-16 kl. 08.00—13.00

1. a) Gränsvärdet är av typ $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$. Vi delar täljaren och nämnaren med den term som dominerar nämnaren, dvs x^4:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^4 - 5x + 7}{x^4 - 5x + 1} = \lim_{x\to\infty} \frac{3 - \frac{5}{x^3} + \frac{7}{x^4}}{1 - \frac{5}{x^3} + \frac{1}{x^4}} = 3.$$

b) Notera att eftersom $x \to 2_-$ har vi $|x-2| = -(x-2)$ så att

$$\lim_{x\to 2_-} \frac{|x-2|}{x^2-4} = \lim_{x\to 2_-} \frac{-(x-2)}{(x-2)(x+2)} = -\lim_{x\to 2_-} \frac{1}{x+2} = -\frac{1}{4}.$$

c) Vi förlänger uttrycket med nämnarens konjugatuttryck

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{\sqrt{3x-2}-1} &= \lim_{x\to 1} \frac{x-1}{\sqrt{3x-2}-1} \cdot \frac{\sqrt{3x-2}+1}{\sqrt{3x-2}+1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)\left(\sqrt{3x-2}+1\right)}{3x-3} = \\ &= \frac{1}{3} \lim_{x\to 1} \left(\sqrt{3x-2}+1\right) = \frac{2}{3}.\end{aligned}$$

2. Derivatan av f är

$$f'(x) = \frac{2x}{1+x^2}$$

och är således > 0 på $D_f = [0,1]$ utom i 0. Det betyder att f är strängt växande och således injektiv dvs inverterbar. Det betyder också att $V_f = [f(0), f(1)] = [0, \ln 2]$. Detta ger oss att $D_{f^{-1}} = V_f = [0, \ln 2]$ medan $V_{f^{-1}} = D_f = [0,1]$. Det återstår att räkna ut f^{-1}. Det gör vi genom att lösa ut x ur sambandet $y = f(x)$ (enligt definition av f^{-1}):

$$y = \ln(1+x^2) \Leftrightarrow e^y = 1 + x^2 \Leftrightarrow x^2 = e^y - 1 \Leftrightarrow x = \sqrt{e^y - 1} = f^{-1}(y)$$

(notera att alla omskrivningar är logiska ekvivalenter $\Leftrightarrow$ vilket i sig visar existens av f^{-1}; val av plustecknet i sista uträkningen är pga att $x \geq 0$ på D_f) så att

$$f^{-1}(x) = \sqrt{e^x - 1}.$$

3. a) Funktionen f är deriverbar i $a \in D_f$ om gränsvärdet

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

existerar ändligt. Gränsvärdet kallas då derivatan av f i a och betecknas med $f'(a)$.

b) Vi använder definitionen i a) med $a = 0$ och får

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} h^{p-1} \cos\left(\frac{1}{h}\right)$$

som existerar och är lika med 0 så snart $p > 1$ ty då går h^{p-1} mot 0 medan cos är en begränsad funktion (Sats 3.1). Vid $p \leq 1$ saknas gränsvärdet och funktionen har då således ingen derivata i 0.

4. Notera först att f är jämn. Vi ser lätt att $D_f = R \setminus \{-1, 1\}$ (vi har alltså två hål i D_f : $+1$ och -1). Funktionen saknar nollställen. Vi kan nu titta på asymptoter. Vi ser lätt att

$$\lim_{x\to -1_\pm} f(x) = \mp\infty, \qquad \lim_{x\to 1_\pm} f(x) = \pm\infty$$

(notera alla teckenuppsättningar) så att både $x = 1$ och $x = -1$ är vertikala asymptoter. Vidare, $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$ så att $y = 0$ är horisontell asymptot både vid $x \to +\infty$ och vid $x \to -\infty$. Det betyder även att sneda asymptoter saknas. Dags att derivera. Vi får

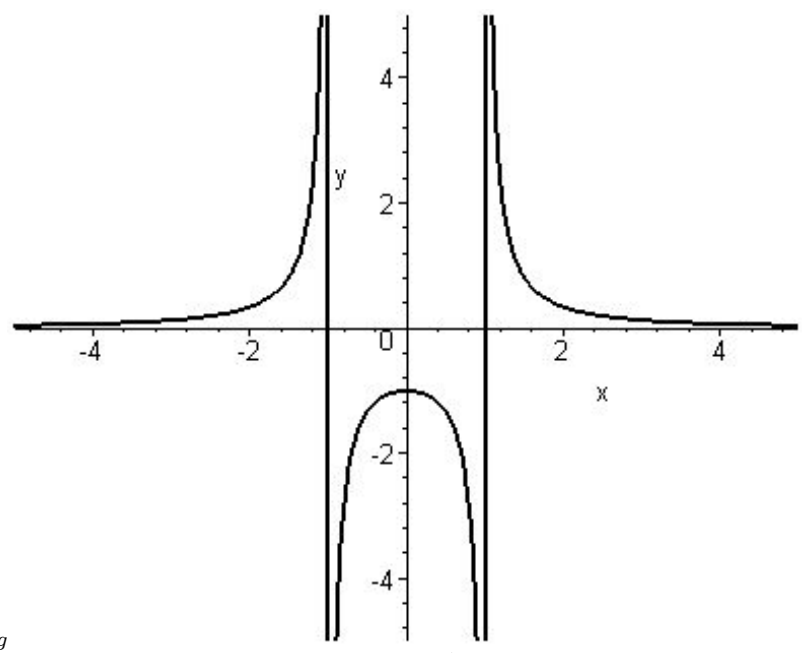
$$f'(x) = -\frac{2x}{(x^2-1)^2}$$

som ger ett enda stationär punkt $x = 0$. Singulära punkter saknas. Vidare

$$f''(x) = \frac{2(3x^2+1)}{(x^2-1)^3}$$

som visar att inflektionspunkter saknas och att funktionen är konkav för $x \in]-1, 1[$ och konvex för $x \in]-\infty, -1[\cup]1, \infty[$. Teckentabell (gör den!) plus all information ovan visar då att funktionen ser ut som på bilden nedanför där även de två vertikala asymptoterna kan åskådas.

1



1.jpg

Funktionen $\frac{1}{x^2-1}$

5. a) Se boken, Sats 4.6 sid. 192.

   b) Vi kan inte räkna ut f^{-1}. Istället måste vi använda satsen i a). Vi ser att $f(1) = 6$ så att, enligt denna sats,

$$(f^{-1})'(6) = \frac{1}{f'(1)}$$

   förutsätt att $f'(1) \neq 0$. Men, $f'(x) = 5x^4 + 4x^3 + 3x^2 + 2x + 1$ så att $f'(1) = 15 \neq 0$. Det betyder att $(f^{-1})'(6) = \frac{1}{15}$.

6. Vi skriver först om z till polär form. Vi vet att $1 + i = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$, $1 - i = \sqrt{2}e^{-i\pi/4}$ medan $1 + \sqrt{3}i = 2e^{i\pi/3}$. Det betyder att

$$z = \frac{\sqrt{2}e^{i\pi/4}}{\sqrt{2}e^{-i\pi/4} \cdot 2e^{i\pi/3}} = \frac{1}{2}e^{i\pi/6}.$$

   Detta ger

$$\begin{aligned} z^{20} &= \frac{1}{2^{20}}e^{20i\pi/6} = \frac{1}{2^{20}}e^{2\pi i + \frac{4}{3}i\pi} = \frac{1}{2^{20}}e^{4i\pi/3} = \frac{1}{2^{20}}\left(\cos\frac{4}{3}\pi + i\sin\frac{4}{3}\pi\right) = \\ &= \frac{1}{2^{20}}\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{1}{2^{21}}\left(1 + i\sqrt{3}\right). \end{aligned}$$

7. a) Se boken, Sats 3.9, sid. 146.

   b) Betrakta funktionen $f(x) = 2x^3 + x - 4$. Vi skall visa att funktionen har exat ett nollställe. Eftersom $f(1) = -1 < 0$ medan $f(2) = 14 > 0$ och pga f är kontinuerlig, satsen i a) (tillämpad till f på intervallet $[1, 2]$) garanterar oss att det finst minst en punkt, kalla den x_0, mellan 1 och 2 där $f(x_0) = 0$. Vidare, eftersom $f'(x) = 6x^2 + 1 > 0$, funktionen f är strängt växande på hela reella axeln. Det betyder att så snart $x < x_0$ vi har $f(x) < f(x_0)$ medan för alla $x > x_0$ måste vi ha $f(x) > f(x_0)$. Detta medför att x_0 är funktionens enda nollställe.