Krzysztof Marciniak, ITN
Linköpings universitet
tfn 011-36 33 20
krzma@itn.liu.se

# Lösningar till kontrollskrivningen KTR1 i Envariabelanalys I (TNIU 22) för BI1

2009-11-16 kl. 8.00—10.00

1. Funktionen

$$f : [0,2] \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \sqrt{x^3 + 1}$$

har de...nitionsmängden $D_f = [0,2]$. Eftersom $f$ är strängt växande (som en rot av en strängt växande funktion) blir värdemängden $V_f = [f(0), f(2)] = [1,3]$. Således, $D_{f^{-1}} = V_f = [1,3]$ medan $V_{f^{-1}} = D_f = [0,2]$. Vi räknar nu ut $f^{-1}$ genom att lösa ut $x$ ur sambandet $y = f(x)$:

$$y = \sqrt{x^3 + 1}\ , \ y^2 = x^3 + 1\ , \ x^3 = y^2 - 1\ , \ x = \sqrt[3]{y^2 - 1} = f^{-1}(y)$$

så att

$$f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x^2 - 1}.$$

Notera alla ekvivalenspilar i uträkningen ovan, dessa är sanna pga. att både $x$ och $y$ är icke-negativa ty $x \in D_f = [0,2]$ och $y \in V_f = [1,3]$. Funktionerna $f$, $f^{-1}$ samt symmetriaxeln $y = x$ är ritade på Figur 1 med blått, svart resp. gult.

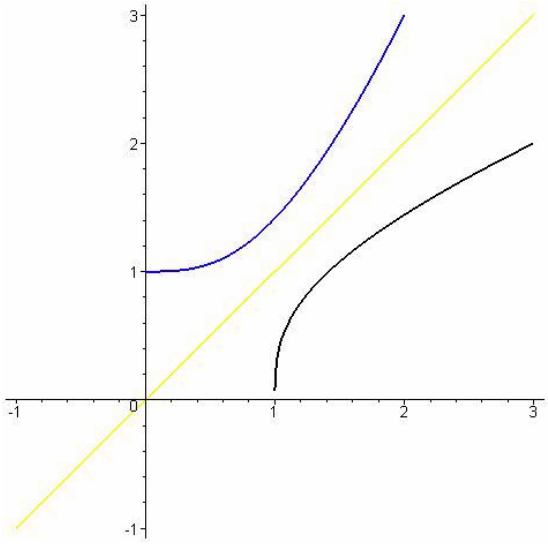


Figure 1:

2. Ekvationen

$$\arctan 2x = \arcsin \frac{x}{2}$$

är definierad på intervallet $[-2, 2]$ ty $D_{\arcsin} = [-1, 1]$ medan $D_{\arctan} = \mathbb{R}$. Vi ser också att $VL = HL \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ ty $V_{\arctan} = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \supseteq V_{\arcsin} = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Låt oss beräkna tan av bägge led. Vi får då att $\tan(VL) = \tan(\arctan 2x) = 2x$ ty $\tan(\arctan \alpha) = \alpha$ för alla reella $\alpha$. Vidare

$$\tan(HL) = \tan\left(\arcsin \frac{x}{2}\right) = \frac{\sin\left(\arcsin \frac{x}{2}\right)}{\cos\left(\arcsin \frac{x}{2}\right)} = \frac{\frac{x}{2}}{\sqrt{1 - \sin^2\left(\arcsin \frac{x}{2}\right)}} =$$

$$= \frac{\frac{x}{2}}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{2}\right)^2}} = \frac{x}{2\sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}} = \frac{x}{\sqrt{4 - x^2}}.$$

där plustecknet i trigettan är pga. att $\arcsin \frac{x}{2} \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ och $\cos \geq 0$ där. Således, ekvationen $\tan(VL) = \tan(HL)$ antar formen

$$2x = \frac{x}{\sqrt{4 - x^2}} \tag{1}$$

Vi kan t.ex. kvadrera den (falska rötter kan uppstå!) och får $4x^2 = \frac{x^2}{4 - x^2}$ eller $16x^2 - 4x^4 = x^2$ dvs. $4x^4 - 15x^2 = 0$ som har tre rötter: $\pm\frac{\sqrt{15}}{2}$ samt 0. Vi ser nu lätt att $x = 0$ är en sann rot till ekvationen. Vi ser också att de bägge rötterna $\pm\frac{\sqrt{15}}{2}$ uppfyller ekvationen (1). Det betyder att $\tan(VL) = \tan(HL)$ i dessa punkter. Funktionen tan är dock injektiv på $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ (där både $VL$ och $HL$ ligger) så att dessa tal är också sanna rötter till den ursprungliga ekvationen. På Figur 2 kan man se de bägge funktionerna (arcsin är röd och arctan är blå) och att de verkligen skär varandra i tre punkter.

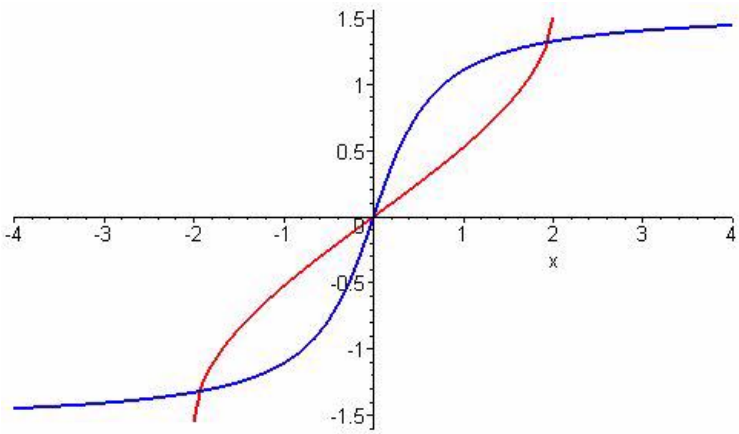


Figure 2:

3. a) Gränsvärdet är av typ $\left[\frac{0}{0}\right]$. Täljaren måste alltså innehålla faktor $(x - (-1)) = (x + 1)$ /enligt faktorsatsen/. Vi får efter polynomdivision

$$\lim_{x \to -1} \frac{x^3 + 1}{x + 1} = \lim_{x \to -1} \frac{(x + 1)\left(x^2 - x + 1\right)}{x + 1} = \lim_{x \to -1} \left(x^2 - x + 1\right) = 3.$$

b) Även här är gräsnvärdet av typ $\left[\frac{0}{0}\right]$. Genom att förlänga uttrycket med täljarens och nämnarens konjugatuttryck får vi

$$\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{3+x} - 2}{\sqrt{2x-1} - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{\left(\sqrt{3+x} - 2\right)\left(\sqrt{3+x} + 2\right)\left(\sqrt{2x-1} + 1\right)}{\left(\sqrt{2x-1} - 1\right)\left(\sqrt{2x-1} + 1\right)\left(\sqrt{3+x} + 2\right)} =$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)\left(\sqrt{2x-1} + 1\right)}{(2x-2)\left(\sqrt{3+x} + 2\right)} = \frac{1}{2} \lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{2x-1} + 1}{\sqrt{3+x} + 2} = \frac{1}{4}.$$

c) Vi upptäcker att gränsvärdet här är en kombination av standardgränsvärden:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\arctan(2x)}{\sin(3x)} = \lim_{x \to 0} \left( \frac{\arctan(2x)}{2x} \cdot \frac{3x}{\sin(3x)} \cdot \frac{2}{3} \right) = 1 \cdot 1 \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3}.$$

4. a) Se boken, De…nition 3.5 sid. 140.

b) Funktionen

$$f(x) = \begin{cases} x - 5b & \text{för } x < 3 \\ 1 - b^2 x & \text{för } x \geq 3 \end{cases}$$

är säkert kontinuerlig för alla $x$ utom möjligen för $x = 3$. Vidare, funktionen $f$ blir kontinuerligt i 3 om $\lim_{x \to 3} f(x) = f(3)$ (de…nition av kontinuitet). Vi undersöker således först gränsvärdet i 3. Vi vet att $\lim_{x \to 3} f(x)$ existerar om och endast om både höger- och vänstergränsvärdet i denna punkt existerar och är lika. Vi beräknar således

$$\lim_{x \to 3_-} f(x) = \lim_{x \to 3_-} (x - 5b) = 3 - 5b$$

$$\lim_{x \to 3_+} f(x) = \lim_{x \to 3_+} (1 - b^2 x) = 1 - 3b^2$$

Således, $\lim_{x \to 3} f(x)$ existerar om $3 - 5b = 1 - 3b^2$ dvs. om $3b^2 - 5b + 2 = 0$ vilket har två reella lösningar $b = 2/3$ samt $b = 1$. Vi ser att i bägge dessa fall $\lim_{x \to 3} f(x) = f(3)$ så att bägge val av $b$ gör funktionen $f$ kontinuerlig i $x = 3$ och därmed överallt på hela reella axeln.