Krzysztof Marciniak, ITN
Linköpings universitet
tfn 011-36 33 20
krzma@itn.liu.se

Lösningar till kontrollskrivningen KTR1 i Envariabelanalys I (TNIU 22)
för BI1

2010-11-15 kl. 08.00—10.00

1. a) Se boken, Def. 2.3 sid. 73.

   b) Funktionens definitionsmängd är $D_f = [0,1]$. Eftersom funktionen är strängt avtagande (ju större x desto mindre $1-x^2$ för $x \in D_f$; det visar dessutom att f har invers) blir funktionens värdemängd $V_f = [f(1), f(0)] = [0,1]$ (samma som definitionsmängd alltså). Således, $D_{f^{-1}} = V_f = [0,1]$ och likaså $V_{f^{-1}} = D_f = [0,1]$. För att bestämma f^{-1} löser vi ut x ur sambandet $y = f(x)$:

$$y = f(x) \Leftrightarrow y = \sqrt{1-x^2} \overset{y\in[0,1]}{\Longleftrightarrow} y^2 = 1-x^2 \Leftrightarrow x^2 = 1-y^2 \overset{x\in[0,1]}{\Longleftrightarrow} x = +\sqrt{1-y^2} = f^{-1}(y)$$

   så att $f^{-1}(x) = \sqrt{1-x^2}$. Vi fick alltså att $f^{-1} = f$ dvs att f är sin egen invers. Det är lätt att förstå om vi inser att f:s graf är en fjärdedel av kvartscirkeln (den som ligger i första kvadranten) så att den är lika med sin spegelbild i linjen $y = x$. Situationen illustreras av figuren nedan.

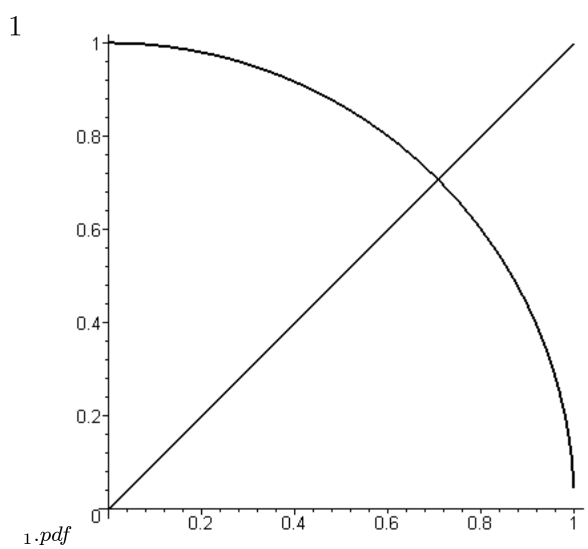


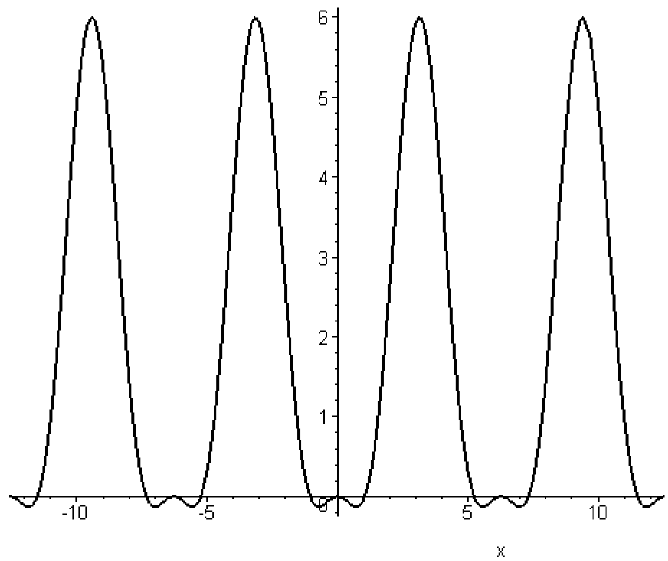
Figure 1: Grafen till $f = f^{-1}$

2. Vi sätter $t = \cos x$. Ekvationen antar då formen

$$2t^2 - 3t + 1 = 0$$

vars lösningar är $t_1 = t$ och $t_2 = \frac{1}{2}$. Vi får alltså två möjligheter: $\cos x = 1$ och $\cos x = \frac{1}{2}$. Den första har lösningsmängd $x = 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$ medan den andra har lösningsmängd $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$. Det kan man t.ex. se med hjälp av enhetscirkelnsmetoden. Bilden nedan visar en del av grafen till $2\cos^2 x - 3\cos x + 1$ där alla tre lösningsfamiljer är klart synliga.

2



2.pdf

Figure 2: Grafen till $2\cos^2 x - 3\cos x + 1$

3. a) *Minsta* gemensamma nämnare hjälper:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x(2x+1)}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{2x+1-1}{x(2x+1)} = \lim_{x\to 0}\frac{2}{2x+1} = 2$$

b) Vi förlänger och förkortar uttrycket med dess konjugatuttryck:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+ax} - \sqrt{x^2+bx}\right) &= \lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+ax} - \sqrt{x^2+bx}\right)\left(\sqrt{x^2+ax} + \sqrt{x^2+bx}\right)}{\left(\sqrt{x^2+ax} + \sqrt{x^2+bx}\right)} = \\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{x^2+ax-\left(x^2+bx\right)}{\left(\sqrt{x^2+ax} + \sqrt{x^2+bx}\right)} = \lim_{x\to\infty}\frac{(a-b)x}{\left(\sqrt{x^2+ax} + \sqrt{x^2+bx}\right)} = \\
&= (a-b)\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\left(\sqrt{1+\frac{a}{x}} + \sqrt{1+\frac{b}{x}}\right)} = \frac{a-b}{2}.
\end{aligned}$$

c) Vi använder oss av standardgränsvärdet e) i Sats 3.11, sid. 150:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{3x}\right)^{7x} = \lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{3x}\right)^{3x}\right]^{7/3} = e^{7/3}.$$

4. a) $f : D_f \to R$ är kontinuerlig i en punkt $a \in D_f$ (sådan att D_f innehåller punkter godtyckligt nära a) om

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

b) Funktionen

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\arctan 3x}{4x} & \text{för } x < 0 \\[2ex] A & \text{för } x = 0 \\[2ex] \dfrac{\ln(1+Bx)}{x} & \text{för } x > 0 \end{cases}$$

är säkert kontinuerlig för alla x utom kanske i 0. Vi undersöker först när f har ett gränsvärde i 0 genom att jämföra högergränsvärde med vänstergränsvärde. Vi använder gränsvärdet (c) i Sats 3.11 sid. 150.

$$\lim_{x \to 0_+} f(x) = \lim_{x \to 0_+} \frac{\ln(1+Bx)}{x} = \lim_{x \to 0_+} \frac{\ln(1+Bx)}{Bx} B = B$$

Vidare, för att uträkna funktionens vänstergränsvärde använder vi gränsvärdet i Sats 3.12 sid. 155.

$$\lim_{x \to 0_-} f(x) = \lim_{x \to 0_-} \frac{\arctan 3x}{4x} = \lim_{x \to 0_-} \left(\frac{\arctan 3x}{3x} \cdot \frac{3}{4} \right) = \frac{3}{4}$$

Således, B måste vara lika med $\frac{3}{4}$ för att $\lim_{x \to 0} f(x)$ skall existera. Vidare, f är kontinuerlig i 0 om $\lim_{x \to 0} f(x) = f(0)$ vilket ger att $A = B = \frac{3}{4}$.