Krzysztof Marciniak, ITN
Linköpings universitet
tfn 011-36 33 20
krzma@itn.liu.se

Lösningar till tentamen TEN1 i Envariabelanalys I (TNIU 22)

för BI

2010-12-16 kl. 08.00—13.00

1. a) Gränsvärdet är av typ $\left[\frac{0}{0}\right]$ varför vi faktoriserar både täljaren och nämnaren - faktorsatsen säger ju att både täljaren och nämnaren innehåller faktorn $x-2$:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+x-6}{x^2+2x-8}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+3)}{(x-2)(x+4)}=\lim_{x\to 2}\frac{x+3}{x+4}=\frac{5}{6}$$

b) Vi skriver om gränsvärdet med hjälp av två standardgränsvärden:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x+\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}\cdot\frac{x}{x+\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}\cdot\frac{1}{1+\frac{\sin x}{x}}=1\cdot\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$$

ty både $\frac{e^x-1}{x}$ och $\frac{\sin x}{x}$ går mot 1 då $x\to 0$.

c) Vi förlänger och förkortar både täljaren och nämnaren med motsvarande konjugatuttryck:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+9}-3} &= \lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{x^2+1}-1\right)}{\left(\sqrt{x^2+9}-3\right)}\cdot\frac{\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}{\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}\cdot\frac{\left(\sqrt{x^2+9}+3\right)}{\left(\sqrt{x^2+9}+3\right)}= \\ &= \lim_{x\to 0}\frac{x^2+1-1}{x^2+9-9}\cdot\frac{\sqrt{x^2+9}+3}{\sqrt{x^2+1}+1}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+9}+3}{\sqrt{x^2+1}+1}=\frac{6}{2}=3\end{aligned}$$

2. Eftersom

$$y=\frac{\sin x}{1+x^2}$$

så är $y(\pi)=0$ så att punkten där tangenten skall dras är $(\pi,0)$ (ligger på x-axeln). Vi beräknar funktionens derivata (genom kvotregeln):

$$y'=\frac{\cos x\cdot(1+x^2)-\sin x\cdot 2x}{(1+x^2)^2}$$

Den sökta tangentens riktningskoefficient k blir då

$$k=y'(\pi)=-\frac{1}{1+\pi^2}.$$

Således, den sökta tangenten är

$$y=kx+m=-\frac{1}{1+\pi^2}x+m$$

där konstanten m kan bestämmas om vi sätter in punkten $(\pi,0)$ i tangentens ekvation. Vi får då $0=-\frac{\pi}{1+\pi^2}+m$ så att $m=\frac{1}{1+\pi^2}$. Den sökta tangenten är alltså

$$y=-\frac{1}{1+\pi^2}x+\frac{1}{1+\pi^2}=\frac{1}{1+\pi^2}(1-x)$$

och kan åskådas på figuren nedanför tillsammans med den ursprungliga funktionen.

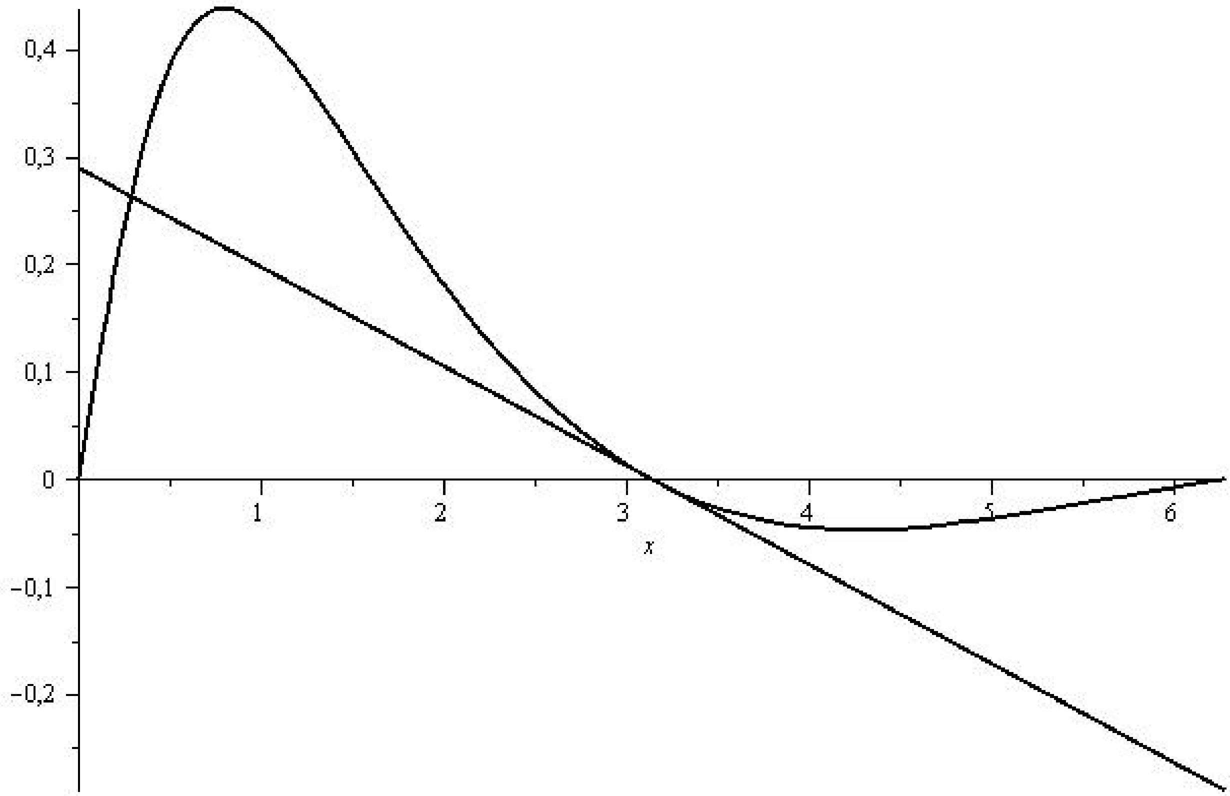

Figure 1: Funktionen $y = \frac{\sin x}{1+x^2}$ med dess tangent vid $x = \pi$.

3. a) Se boken, Sats 4.3 sid. 187.

   b) Vi använder kedjeregeln (och sedan kvotregeln för att beräkna den inre derivatan):

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) &= \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)^2}}\cdot\frac{1\cdot\sqrt{1+x^2}-x\cdot\frac{1}{2\sqrt{1+x^2}}\cdot 2x}{1+x^2} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{1+x^2}}}\cdot\frac{1+x^2-x^2}{(1+x^2)^{3/2}} = \sqrt{1+x^2}\cdot\frac{1}{(1+x^2)^{3/2}} = \frac{1}{1+x^2}.\end{aligned}$$

Som ni ser, den angivna funktionen har samma derivata som $\arctan x$ så att dessa funktioner skiljer sig högst på en konstant. Genom att stoppa $x = 0$ i båda kan vi faktiskt se att denna konstant är noll dvs att det är en och samma funktion. Med andra ord:

$$\arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) = \arctan x \quad \text{för alla } x \in \mathbf{R}$$

(se detta genom att rita en lämplig rättvinklig triangel, med den ena kateten 1 och den andra x så att hypotenusan är $\sqrt{1+x^2}$. Detta visar påståendet för $x > 0$. Eftersom båda uttryck är udda funktioner av x så följer påståendet även för negativa x.)

4. a) För att visa att f är inverterbar på $D_f = [-1, 1]$ räcker det t.ex. att visa att f är strängt monoton där. Men

$$f'(x) = e^x + 1 > 0 \text{ på } D_f$$

så att f är strängt växande på D_f.

b) Naturligtvis, $V_{f^{-1}} = D_f = [-1, 1]$. Vidare, eftersom funktionen är strängt växande, $D_{f^{-1}} = V_f = [f(-1), f(1)] = \left[e^{-1} - 1, e + 1\right]$.

c) Vi inser att $1 = f(0)$ så enligt satsen om derivatan av invers funktion (Sats 4.6, sid. 192)

$$\left(f^{-1}\right)'(1) = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{e^0 + 1} = \frac{1}{2}.$$

5. Uppgiften kräver att vi först deriverar funktionen två gånger. Vi använder kvotregeln:

$$f'(x) = \frac{1 \cdot (x^2 + 1) - x \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2}.$$

Vi deriverar en gång till (kvotregeln igen):

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{-2x \cdot (x^2+1)^2 - (1 - x^2) \cdot 2(x^2+1) \cdot 2x}{(x^2+1)^4} = \frac{-2x \cdot (x^2+1) - (1 - x^2) \cdot 4x}{(x^2+1)^3} = \\ &= \frac{-2x^3 - 2x - 4x + 4x^3}{(x^2+1)^3} = \frac{2x^3 - 6x}{(x^2+1)^3} = \frac{2x(x^2 - 3)}{(x^2+1)^3}. \end{aligned}$$

Andraderivatans nollställen är således $x = 0$ samt $x = \pm\sqrt{3}$. En enkel teckenstudium (notera att nämnaren är alltid positiv och påverkar inte andraderivatans tecken) visar att $f'' > 0$ för $-\sqrt{3} < x < 0$ samt för $x > \sqrt{3}$ och är negativ annars. Det betyder att

$$f \text{ är strängt konvex för } x \in \left]-\sqrt{3}, 0\right[\cup \left]\sqrt{3}, \infty\right[\text{ och strängt konkav för } x \in \left]-\infty, -\sqrt{3}\right[\cup \left]0, \sqrt{3}\right[$$

och att 0 samt $x = \pm\sqrt{3}$ är funktionens samtliga inflektionspunkter. Funktionen kan ses på Figure 2.

6. Funktionen är kontinuerlig och definierad på ett kompakt intervall så att $f_{\max}$ och $f_{\min}$ antas. Vi vet också att dessa kan antas i en eller flera av följande punkter: intervallets ändpunkter, stationära punkter eller singulära punkter. Intervallets ändpunkter är -1 och 1. Vidare,

$$f'(x) = 3x^2 - 2x = x(3x - 2)$$

så att singulära punkter saknas medan stationära punkter inträffar när $f'(x) = 0$ dvs i $x = 0$ och i $x = \frac{2}{3}$. Vi testar funktionens värde i dessa fyra punkter och får

$$\begin{aligned} f(-1) &= -2 = f_{\min} \\ f(0) &= 0 = f_{\max} \\ f\left(\frac{2}{3}\right) &= \frac{8}{27} - \frac{4}{9} = -\frac{4}{27} \\ f(1) &= 0 = f_{\max} \end{aligned}$$

Notera att $f_{\max}$ antas i två punkter. Funktionens skiss på Figure 3 förklarar allt.

7. a) Vi måste visa att $F'(x) = f(x)$. Detta görs med hjälp av kedjeregeln:

$$
\begin{aligned}
F'(x) &= \frac{1}{x+\sqrt{x^2+k}} \cdot \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x^2+k}} \cdot 2x\right) = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+k}} \cdot \frac{\sqrt{x^2+k}+x}{\sqrt{x^2+k}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{x^2+k}} = f(x).
\end{aligned}
$$

b) Integralen beräknas med hjälp av partiell integration; vi deriverar ln och integrerar x^2:

$$
\begin{aligned}
\int x^2 \ln x \, dx &= \left[\begin{array}{c} f' = x^2, f = \frac{1}{3}x^3 \\ g = \ln x, g' = \frac{1}{x} \end{array} \right] = \frac{1}{3}x^3 \ln x - \frac{1}{3}\int x^3 \frac{1}{x} \, dx = \frac{1}{3}x^3 \ln x - \frac{1}{3}\int x^2 \, dx \\
&= \frac{1}{3}x^3 \ln x - \frac{1}{9}x^3 + C = \frac{1}{3}x^3 \left(\ln x - \frac{1}{3}\right) + C.
\end{aligned}
$$

Genom att derivera tillbaka kan vi kontrollera svaret:

$$
\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{3}x^3\left(\ln x - \frac{1}{3}\right) + C\right] = x^2\left(\ln x - \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{3}x^3 \cdot \frac{1}{x} = x^2 \ln x - \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{3}x^2 = x^2 \ln x.
$$

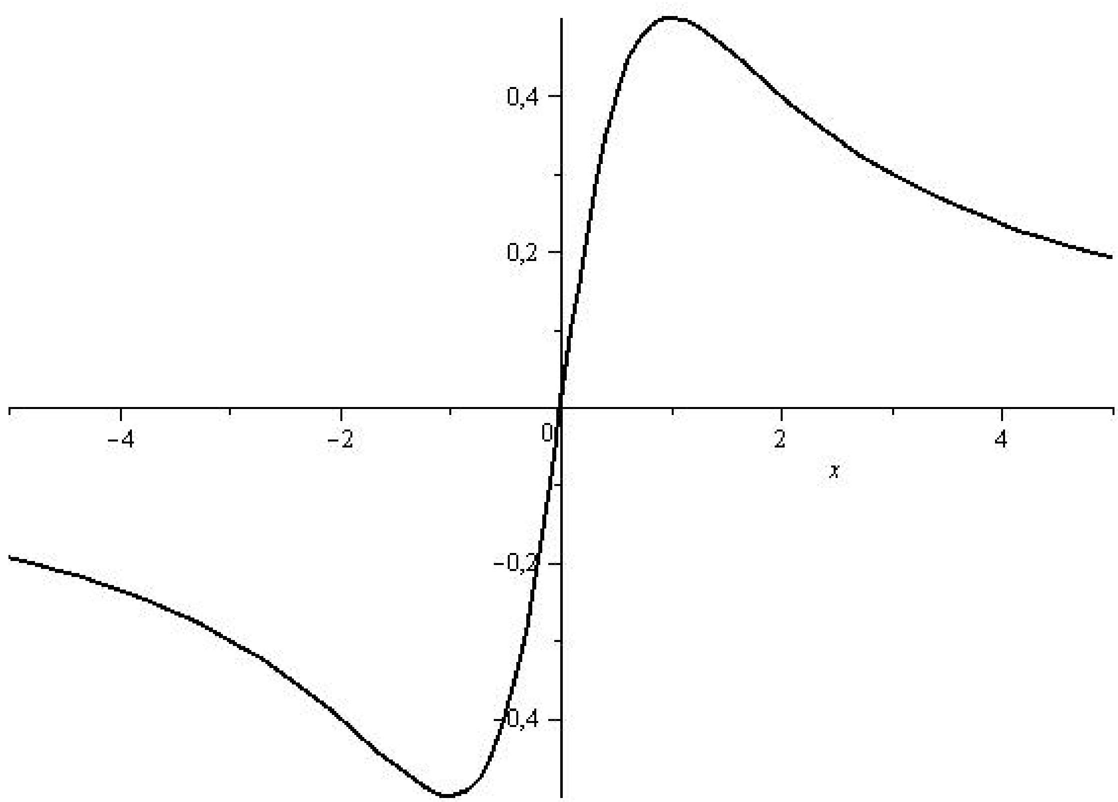

Figure 2: Funktionen $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$

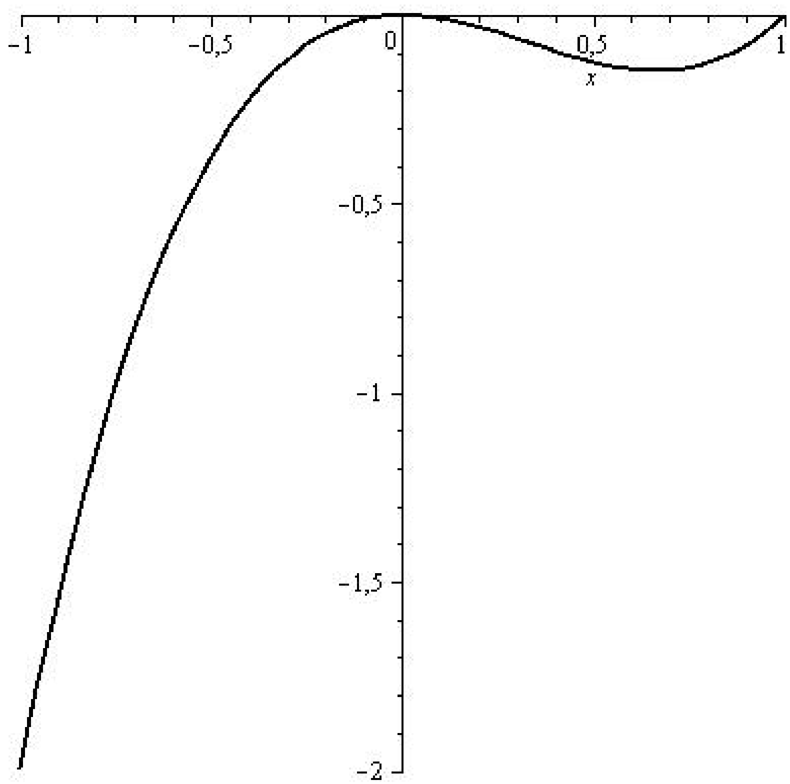

Figure 3: Funktionen $f(x) = x^3 - x^2$ på $[-1, 1]$.