Krzysztof Marciniak, ITN
Linköpings universitet
tfn 011-36 33 20
krzma@itn.liu.se

Lösningar till tentamen TEN1 i Envariabelanalys I (TNIU 22)
för BI
2011-04-28 kl. 08.00—13.00

1. a) Funktionen

$$f : [\ln 2, \ln 3] \to \mathbf{R}, \quad f(x) = \ln(e^x - 1)$$

är inverterbar till exempel därför att den är strängt växande. Det kan vi se genom att beräkna funktionens derivata (med hjälp av kedjeregeln):

$$f'(x) = \frac{e^x}{e^x - 1} > 0 \text{ på } D_f = [\ln 2, \ln 3].$$

b) Den inversa funktionen f^{-1} hittar vi genom att räkna ut x ur sambandet $y = f(x)$. Vi får

$$y = \ln(e^x - 1) \Leftrightarrow e^y = e^x - 1 \Leftrightarrow e^x = e^y + 1 \Leftrightarrow x = \ln(e^y + 1) = f^{-1}(y)$$

där alla ekvivalenser $\Leftrightarrow$ gäller på D_f. Det betyder att $f^{-1}(x) = \ln(e^x + 1)$. Det återstår att ta fram $D_{f^{-1}}$ och $V_{f^{-1}}$. Naturligtvis, $V_{f^{-1}} = D_f = [\ln 2, \ln 3]$. Vidare, eftersom f är strängt växande, $D_{f^{-1}} = V_f = [f(\ln 2), f(\ln 3)] = [0, \ln 2]$.

2. a) Vi delar både täljaren och nämnaren med x och får

$$\lim_{x\to 0} \frac{x + x\cos x}{\sin x \cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{1 + \cos x}{\frac{\sin x}{x} \cdot \cos x} = \frac{1+1}{1 \cdot 1} = 2$$

b) Gränsvärdet är av typ $\left[\frac{0}{0}\right]$ vilket betyder att $x = 2$ är både täljarens och nämnarens nollställe. Vi använder faktorsatsen och får:

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^3 - 2x^2} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-1)(x-2)}{x^2(x-2)} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-1)}{x^2} = \frac{1}{4}$$

c) Eftersom $x \to -\infty$ har vi $|x|^3 = (-x)^3 = -x^3$ så att

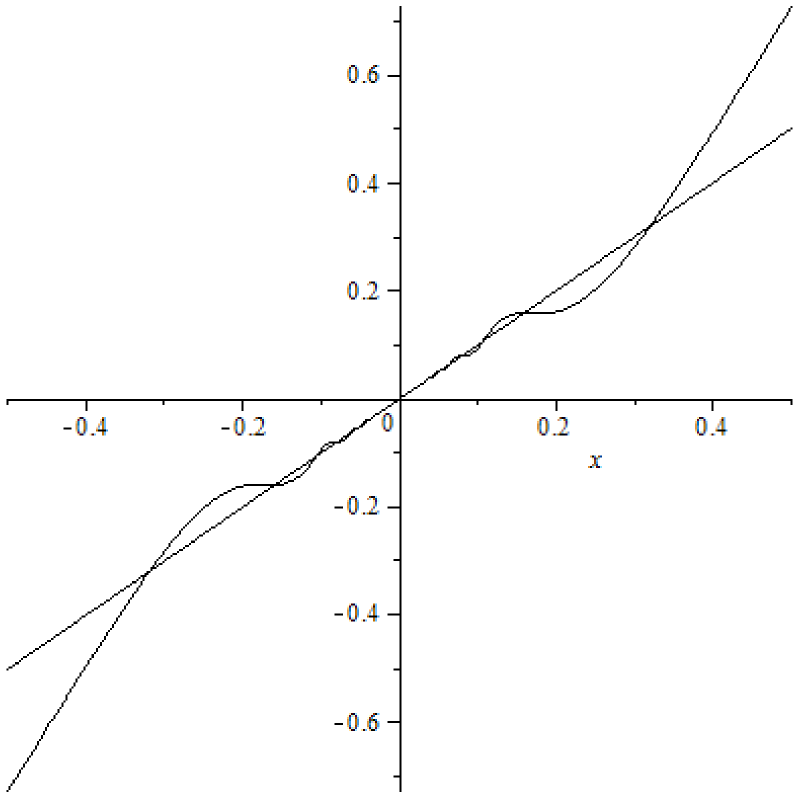
$$\lim_{x\to -\infty} \frac{x^3 - 2}{|x|^3 + 1} = \lim_{x\to -\infty} \frac{x^3 - 2}{-x^3 + 1} = \lim_{x\to -\infty} \frac{1 - \frac{2}{x^3}}{-1 + \frac{1}{x^3}} = -1$$

3. Vi måste först undersöka om funktionen är deriverbar i origo. Pga funktionens utformning måste vi utgå från derivatans definition:

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h + h^2 \sin\left(\frac{1}{h}\right) - 0}{h} = \lim_{h\to 0} \left(1 + h\sin\left(\frac{1}{h}\right)\right) = 1.$$

där det sista gränsvärdet är tack vare Sats 3.1 sid. 131 i boken. Det betyder att f är deriverbar i origo och att dess tangent där är $y = x$. Funktionen och dess tangent är ritade på Figure 1.

1



$_1.pdf$

Figure 1: Funktionen $x + x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ och dess tangent i origo

4. a) Se Sats 4.3 sid. 187 i boken.

   b) Enligt kedjeregeln

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\sqrt{1-x^2}\right)^2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} \cdot (-2x) = \frac{1}{\sqrt{x^2}} \cdot \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{-x}{|x|\sqrt{1-x^2}}$$

   Notera att funktionen är ej deriverbar i 0.

5. Vi vet att största och minsta värde för en kontinuerlig funktion definierad på ett kompakt intervall kan inträffas bara vid ändpunkter, stationära punkter eller singulära punkter. Funktionen saknar singulära punkter (varför?). Ändpunkterna är 0 och π. Vi letar nu efter stationära punkter dvs punkter där $f'(x) = 0$:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - 2\sin x = 0 \Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{2}$$

   vilket inträffar inuti intervallet $[0, \pi]$ i $x = \frac{1}{6}\pi$ och i $x = \frac{5}{6}\pi$. Således, vi har fyra "misstänkta" punkter: $0, \frac{1}{6}\pi$, $\frac{5}{6}\pi$ och π. Vi jämför funktionens värden i dessa punkter:

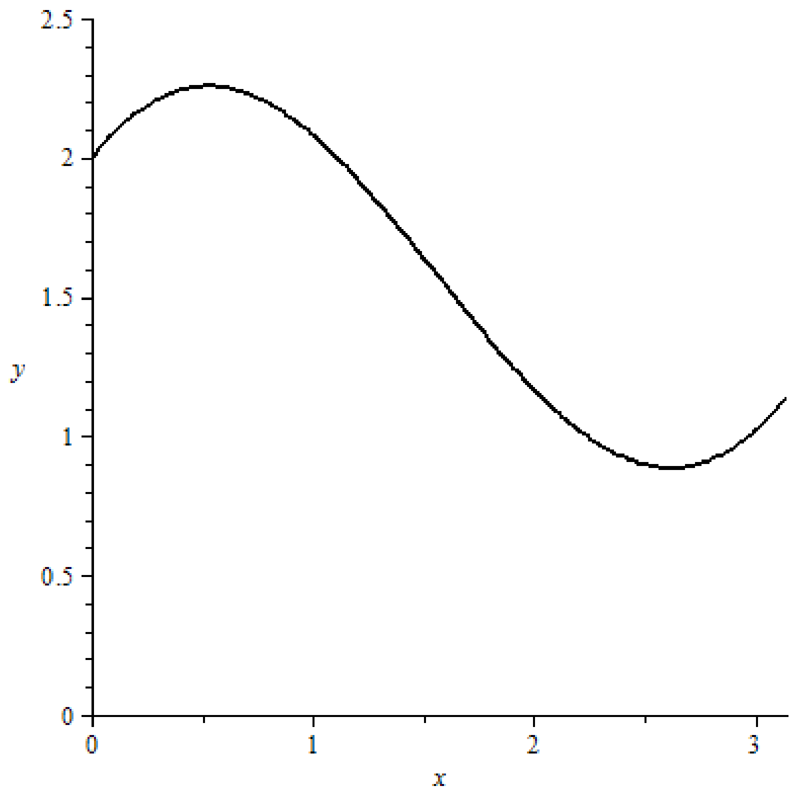
$$\begin{aligned}
f(0) &= 0 + 2\cos 0 = 2 \\
f\left(\frac{\pi}{6}\right) &= \frac{\pi}{6} + 2\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6} + \sqrt{3} > 0.5 + 1.7 = 2.2 \\
f\left(\frac{5}{6}\pi\right) &= \frac{5}{6}\pi + 2\cos\left(\frac{5}{6}\pi\right) = \frac{5}{6}\pi - \sqrt{3} \approx 2.60 - 1.73 < 1 \\
f(\pi) &= \pi + 2\cos\pi = \pi - 2 \approx 1.14
\end{aligned}$$

så att till sist

$$\begin{aligned}
f_{\max} &= \frac{\pi}{6} + \sqrt{3} \text{ antas vid } x = \frac{\pi}{6} \\
f_{\min} &= \frac{5}{6}\pi - \sqrt{3} \text{ antas vid } x = \frac{5}{6}\pi
\end{aligned}$$

Funktionen är ritad på Figure 2.

2



$_2$*.pdf*

Figure 2: Funktionen $f(x) = x + 2\cos x$ på intervallet $[0, \pi]$

6. Vi tillämpar differentialkalkylens medelvärdessats (se Sats 4.10 sid. 206) till funktionen $f(x) = \cos x + \frac{1}{2}x^2$ på intervallet $[0, x]$ ($x > 0$ enligt antagandet). Vi får

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(\xi) \Leftrightarrow \frac{\cos x + \frac{1}{2}x^2 - 1}{x} = -\sin\xi + \xi$$

där ξ är ett tal någonstans mellan 0 och x. Eftersom sin$\xi < \xi$ för $\xi > 0$ får vi att $HL > 0$ så att

$$\frac{\cos x + \frac{1}{2}x^2 - 1}{x} > 0$$

och eftersom $x > 0$ får vi att täljaren måste vara > 0 dvs

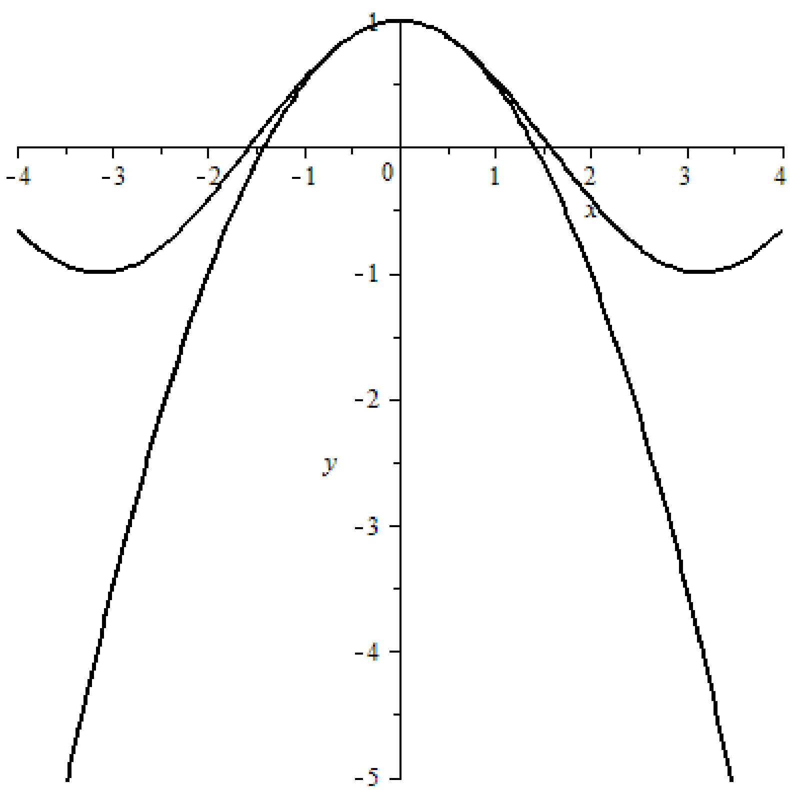
$$\cos x + \frac{1}{2}x^2 - 1 > 0$$

vilket ger den sökta olikheten:

$$\cos x > 1 - \frac{1}{2}x^2.$$

Notera att samma olikhet gäller även för alla $x < 0$ pga att f är en jämn funktion. Se Figure 3 där både $\cos x$ och $1 - \frac{1}{2}x^2$ är ritade.

3



3.pdf

Figure 3: $\cos x > 1 - \frac{1}{2}x^2$ för alla $x \neq 0$

7. a) Se sid. 246-247 i boken.

b) Vi partiellintegrerar tre gånger; vid varje partiellintegration deriveras motsvarande polynom:

$$
\begin{aligned}
\int x^3 \sin x \, dx &= \left[\begin{array}{c} f = x^3, g' = \sin x \\ f' = 3x^2, g = -\cos x \end{array} \right] = -x^3 \cos x + 3 \int x^2 \cos x \, dx = \\
&= \left[\begin{array}{c} f = x^2, g' = \cos x \\ f' = 2x, g = \sin x \end{array} \right] = -x^3 \cos x + 3x^2 \sin x - 6 \int x \sin x \, dx = \\
&= \left[\begin{array}{c} f = x, g' = \sin x \\ f' = 1, g = -\cos x \end{array} \right] = -x^3 \cos x + 3x^2 \sin x - 6 \left(-x \cos x + \int \cos x \, dx \right) = \\
&= -x^3 \cos x + 3x^2 \sin x + 6x \cos x - 6 \sin x + C.
\end{aligned}
$$