Krzysztof Marciniak, ITN
Linköpings universitet
tfn 011-36 33 20
krzma@itn.liu.se

Lösningar till kontrollskrivningen KTR1 i Envariabelanalys I (TNIU 22)

för BI1

2012-11-20 kl. 08.00—10.00

1. a) Notera först att f är strängt växande på sin definitionsmängd $D_f = [0,1]$ vilket betyder att den har invers f^{-1} och även att $V_f = [f(0), f(1)] = [0,3]$. Vi får då att $D_{f^{-1}} = V_f = [0,3]$ och vi vet också att $V_{f^{-1}} = D_f = [0,1]$. Det återstår att bestämma formeln för f^{-1}; detta görs genom att lösa ut x ur sambandet $y = f(x)$. Vi får då

$$y = x^2 + 2x \Leftrightarrow y = (x+1)^2 - 1 \Leftrightarrow (x+1)^2 = y + 1$$

så att $x + 1 = +\sqrt{y+1}$ (plustecknet följer ur det att $x \geq 0$ på D_f) eller $x = -1 + \sqrt{y+1} = f^{-1}(y)$. Döper vi om variabeln i f till x får vi till sist

$$f^{-1}(x) = -1 + \sqrt{x+1}$$

Bägge funktioner illustreras på Figure 1 där även symmetriaxeln $y = x$ ritats.

b) Vi har naturligtvis att $f^{-1} \circ f(x) = x$ för alla $x \in D_f$ och $f \circ f^{-1}(y) = y$ för alla $y \in D_{f^{-1}} = V_f$. Om man inte inser detta får man räkna ut det så här:

$$f^{-1} \circ f(x) = f^{-1}(x^2+2x) = -1+\sqrt{x^2+2x+1} = -1+\sqrt{(x+1)^2} = -1+|x+1| = -1+x+1 = x$$

där vi utnyttjar det att $|x+1| = x+1$ på D_f. På liknande sätt kan man räkna ut $f \circ f^{-1}$.

2. Vi beräknar först tangens av uttrycket och får

$$\tan\left(\arctan\frac{1}{2} + \arctan\frac{1}{3}\right) = \frac{\tan(\arctan\frac{1}{2}) + \tan(\arctan\frac{1}{3})}{1 - \tan(\arctan\frac{1}{2})\arctan(\frac{1}{3})} = \frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}} = \frac{\frac{5}{6}}{1-\frac{1}{6}} = 1$$

så att $\arctan\frac{1}{2} + \arctan\frac{1}{3} = \frac{\pi}{4} + k\pi$ för något (inte alla!) $k \in \mathbf{Z}$. För att bestämma k måste vi uppskatta ungefär var ligger $\arctan\frac{1}{2} + \arctan\frac{1}{3}$. Eftersom $0 < \frac{1}{2} < 1$ och likaså $0 < \frac{1}{3} < 1$ vet vi att $\arctan\frac{1}{2} \in \left]0, \frac{\pi}{4}\right[$ och att även $\arctan\frac{1}{3}$ ligger i samma intervall. Detta ger att $\arctan\frac{1}{2} + \arctan\frac{1}{3} \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ så att $k = 0$ vilket betyder att

$$\arctan\frac{1}{2} + \arctan\frac{1}{3} = \frac{\pi}{4}$$

3. a) Uttrycket är av typ $\left[\frac{0}{0}\right]$ och det betyder enligt faktorsatsen att både täljaren och nämnaren innehåller samma faktor $x - 2$. Faktoriserar vi bort den med hjälp av formeln

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

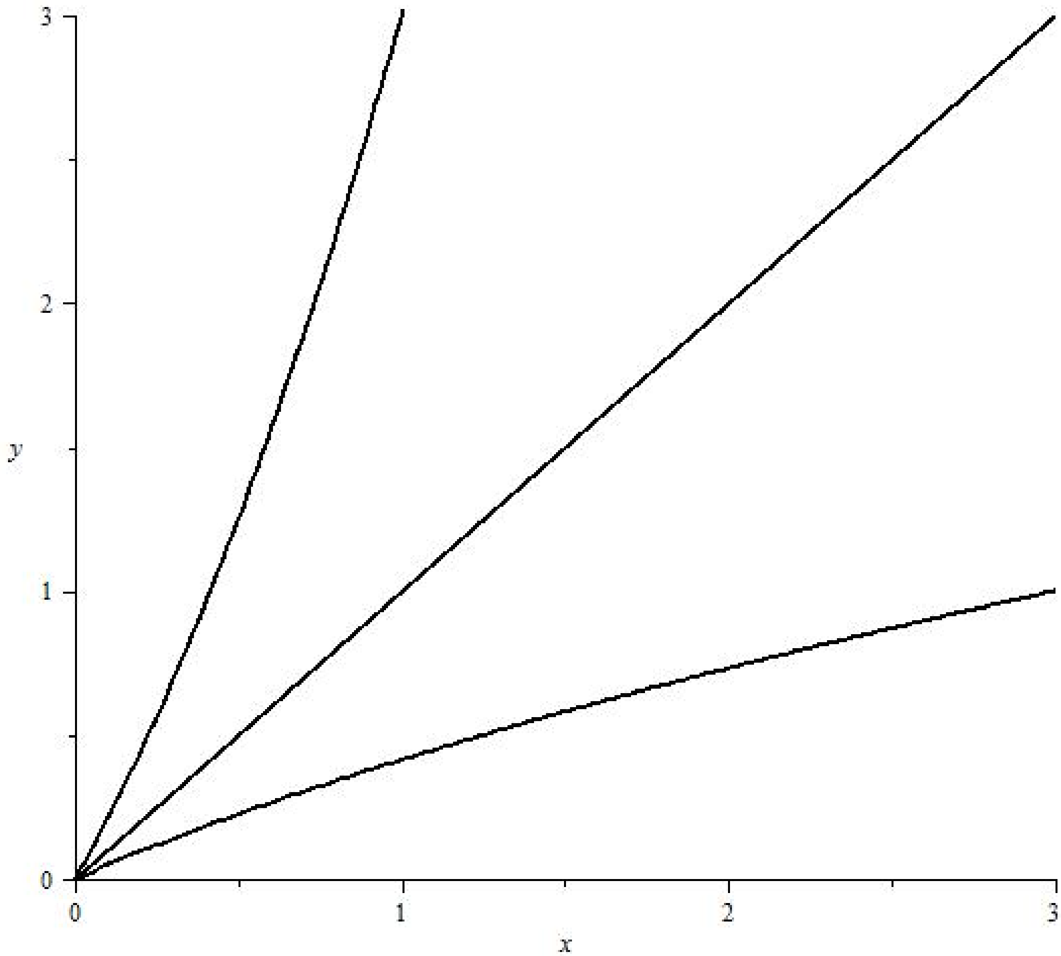

Figure 1: Funktioner f och f^{-1} tillsammans med symmetriaxeln $y = x$

eller med hjälp av polynomdivision får vi

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^4-16}{x^3-8} = \lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x^3+2x^2+4x+8)}{(x-2)(x^2+2x+4)} = \lim_{x\to 2}\frac{x^3+2x^2+4x+8}{x^2+2x+4} = \frac{32}{12} = \frac{8}{3}$$

b) Detta gränsvärde löses genom att skriva om det som en produkt av kända standardgränsvärden:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{\sin 3x} = \lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{2x}\cdot\frac{3x}{\sin 3x}\cdot\frac{2}{3} = \frac{2}{3}$$

c) Genom ett variabelbyte $t = 1-2x$ (notera att $t \to 0$ då $x \to \frac{1}{2}$ och att $2x = 1-t$ så att $4x^2 = (1-t)^2$) får vi

$$\lim_{x\to \frac{1}{2}}\frac{\arcsin(1-2x)}{4x^2-1} = \lim_{t\to 0}\frac{\arcsin t}{t^2-2t} = \lim_{t\to 0}\frac{\arcsin t}{t}\cdot\frac{1}{t-2} = -\frac{1}{2}$$

4. a) Det räcker att ta en kontinuerlig funktion och punktera dess graf i 0, t.ex.

$$f(x) = \begin{cases} 1 \text{ för } x \neq 0 \\ 2 \text{ för } x = 0 \end{cases}$$

Det finns naturligtvis jillions! av andra exempel.

b) Funktionen

$$f(x) = \frac{\sqrt{1+x}-1}{x} \text{ för } x \neq 0$$

blir kontinuerligt i 0 om vi sätter $f(0) = \lim_{x\to 0} f(x)$ förutsatt att gränsvärdet existerar (se definition av kontinuitet i en punkt, Def. 3.5 sid. 136). Vi beräknar alltså gränsvärdet av f i 0:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0} f(x) &= \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\left(\sqrt{1+x}-1\right)\left(\sqrt{1+x}+1\right)}{x\left(\sqrt{1+x}+1\right)} = \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{1+x-1}{x\left(\sqrt{1+x}+1\right)} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{1+x}+1} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Väljer vi alltså $f(0) = \frac{1}{2}$ så blir funktionen kontinuerlig i 0.