Krzysztof Marciniak, ITN
Linköpings universitet
tfn 011-36 33 20
krzma@itn.liu.se

Lösningar till tentamen TEN1 i Envariabelanalys I (TNIU 22)

för BI

2012-12-19 kl. 08.00—13.00

1. Funktionen

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\arctan 2x}{3x} & \text{för } x \neq 0 \\ \\ A & \text{för } x = 0 \end{cases}$$

är säkert kontinuerlig för alla x förutom möjligen i 0. Funktionen blir kontinuerlig även i 0 om (se Def. 3.5 sid. 136)

$$\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$$

Men $f(0) = A$ medan

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\arctan 2x}{3x} = \lim_{x\to 0} \frac{\arctan 2x}{2x} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$$

enligt ett standardgränsvärde. Således, f blir kontinuerlig om $A = \frac{2}{3}$.

2. Enligt derivatans definition erhåller vi

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^3 + \sqrt{x+h} - x^3 - \sqrt{x}}{h} = \\ &= \lim_{h\to 0} \left(\frac{(x+h)^3 - x^3}{h} + \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} \right) = \\ &= \lim_{h\to 0} \left(\frac{x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - x^3}{h} + \frac{\left(\sqrt{x+h} - \sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+h} + \sqrt{x}\right)}{h\left(\sqrt{x+h} + \sqrt{x}\right)} \right) = \\ &= \lim_{h\to 0} \left(3x^2 + 3xh + h^2 + \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} \right) = 3x^2 + \frac{1}{2\sqrt{x}} \end{aligned}$$

vilket stämmer med våra deriveringsregler.

3. a) Funktionen

$$f : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbf{R}, \quad f(x) = e^{2x} + 2\sin x$$

är inverterbar ty den är strängt växande på sin definitionsmängd. För att se detta räcker det att derivera funktionen

$$f'(x) = 2e^{2x} + 2\cos x$$

Vi ser då att $f'(x) > 0$ på D_f ty $e^{2x} > 0$ och $\cos x \geq 0$ på D_f.

b) Vi vet att

$$V_{f^{-1}} = D_f = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

medan, pga. det att f är strängt växande,

$$D_{f^{-1}} = V_f = \left[f\left(-\frac{\pi}{2}\right), f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right] = \left[e^{-\pi} - 2, e^{\pi} + 2\right]$$

c) Eftersom $f(0) = 1$ så har vi, enligt satsen om derivata av invers funktion (Sats 4.6 sid. 189) att

$$\left(f^{-1}\right)'(1) = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{2e^0 + 2\cos 0} = \frac{1}{4}$$

4. a) Se Sats 4.3, sid. 184.

b)Vi börjar med i). Vi vet naturligtvis att f är primitiv till $\frac{1}{\sqrt{x^2+5}}$ (se Sats 5.2 d.v.s. tabell med standardrprimitiver) så att

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+5}}$$

Inser vi inte detta så måste vi derivera f som vanligt dvs med hjälp av kedjeregeln:

$$f'(x) = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+5}}\left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x^2+5}} \cdot 2x\right) = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+5}} \cdot \frac{x+\sqrt{x^2+5}}{\sqrt{x^2+5}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+5}}$$

ii) Ni kanske vet att

$$\arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \equiv \arctan x$$

för alla $x \in \mathbf{R}$ (det är lätt att visa detta grafiskt med hjälp av en rätvinklig triangel med kateterna av längderna 1 respektive x och (således) hypotenusan av längd $\sqrt{1+x^2}$; detta geometriska bevis gäller för alla $x > 0$, för $x = 0$ identiteten är uppfylld eftersom $\arctan 0 = \arcsin 0$ och för $x < 0$ använder vi det att bägge uttryck är udda funktioner av x) så att

$$g'(x) = (\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

Inser man inte detta får man beräkna derivatan med hjälp av kedjeregeln:

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)^2}} \cdot \frac{1 \cdot \sqrt{1+x^2} - x \cdot \frac{1}{2\sqrt{1+x^2}} \cdot 2x}{\left(\sqrt{1+x^2}\right)^2} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{1+x^2}}} \cdot \frac{\sqrt{1+x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2} = \sqrt{1+x^2} \cdot \frac{1+x^2-x^2}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{1+x^2} \end{aligned}$$

5. Uppgiften kräver att vi först deriverar funktionen två gånger. Vi använder kvotregeln:

$$f'(x) = \frac{1 \cdot (1+x^2) - x \cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}.$$

Vi deriverar en gång till (kvotregeln igen):

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{-2x \cdot (1+x^2)^2 - (1-x^2) \cdot 2(1+x^2) \cdot 2x}{(1+x^2)^4} = \frac{-2x \cdot (1+x^2) - (1-x^2) \cdot 4x}{(1+x^2)^3} = \\ &= \frac{-2x^3 - 2x - 4x + 4x^3}{(1+x^2)^3} = \frac{2x^3 - 6x}{(1+x^2)^3} = \frac{2x(x^2-3)}{(1+x^2)^3}. \end{aligned}$$

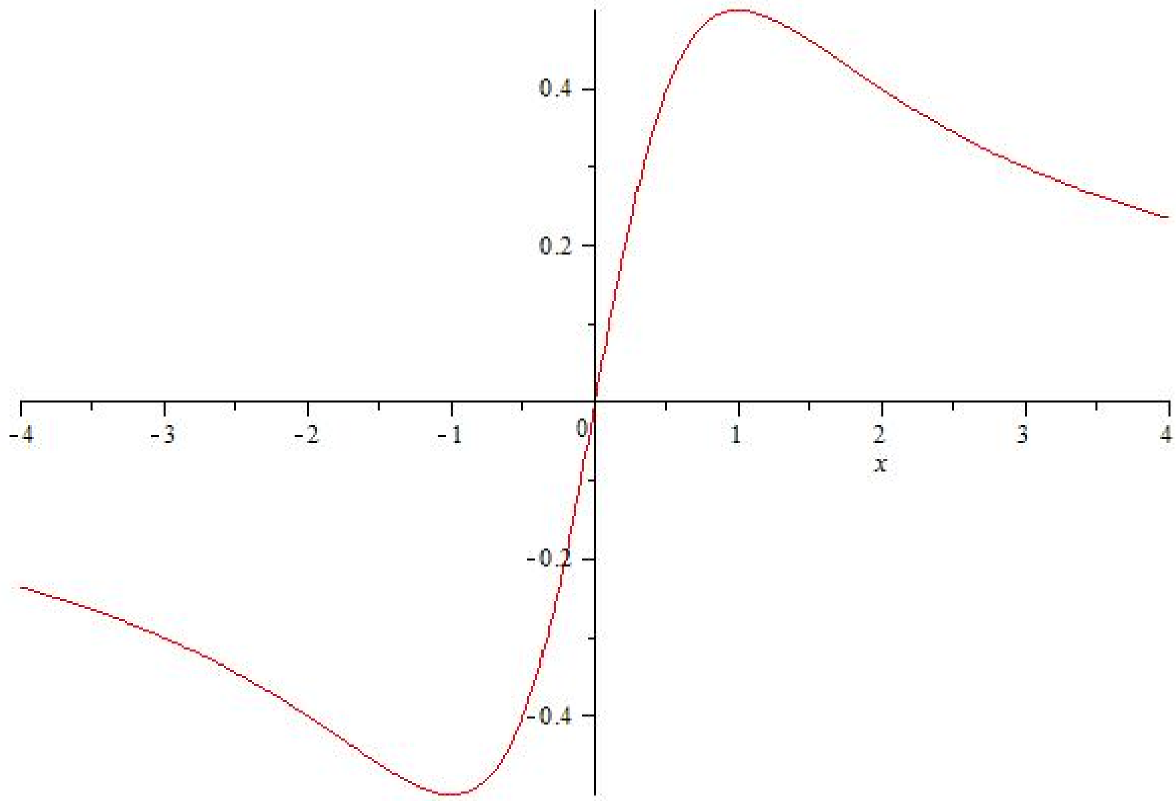

Figure 1: Funktionen $\frac{x}{1+x^2}$

Andraderivatans nollställen är således $x = 0$ samt $x = \pm\sqrt{3}$. En enkel teckenundersökning (notera att nämnaren är alltid positiv och påverkar inte andraderivatans tecken) visar att $f'' > 0$ för $-\sqrt{3} < x < 0$ samt för $x > \sqrt{3}$ och är negativ annars. Det betyder att

$$f \text{ är strängt konvex för } x \in \left[-\sqrt{3}, 0\right] \cup \left[\sqrt{3}, \infty\right[\text{ och strängt konkav för } x \in \left]-\infty, -\sqrt{3}\right] \cup \left[0, \sqrt{3}\right]$$

och att 0 samt $x = \pm\sqrt{3}$ är funktionens samtliga inflektionspunkter. Funktionen kan ses på Figure 1.

6. Vi skriver först om det komplexa talet $\frac{\sqrt{3}-i}{2}$ på polär form. Vi får

$$\frac{\sqrt{3}-i}{2} = e^{-i\pi/6}$$

$$\left(\frac{\sqrt{3}-i}{2}\right)^{12} = \left(e^{-i\pi/6}\right)^{12} = e^{-12i\pi/6} = e^{-2\pi i} = 1$$

och således $\frac{\sqrt{3}-i}{2}$ är en av de 12 komplexa tolfte rötter av 1 dvs av $\sqrt[12]{1}$. Kan du skriva ner de övriga 11 rötterna?

7. a) Se Stas 5.4, sid. 242.

b) Vi börjar med i) och vi beräknar integralen med hjälp av partiell integration; vi deriverar ln och integrerar x:

$$\int x \ln|x| \, dx = \left[\begin{array}{c} f = x, g = \ln|x| \\ F = \frac{1}{2}x^2, g' = \frac{1}{x} \end{array} \right] = \frac{1}{2}x^2 \ln|x| - \frac{1}{2}\int x \, dx = \frac{1}{2}x^2 \ln|x| - \frac{1}{4}x^2 + C$$

Dags för ii). Vi använder partiell integration igen men den här gånger *deriverar* vi x:

$$\int xe^x \, dx = \left[\begin{array}{c} f = e^x, g = x \\ F = e^x, g' = 1 \end{array} \right] = xe^x - \int e^x \, dx = xe^x - e^x + C$$

Det är lämpligt att kontrollderivera dessa uträkningar:

$$\left(\frac{1}{2}x^2 \ln|x| - \frac{1}{4}x^2 + C\right)' = x \ln|x| + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}x = x \ln|x|$$

$$(xe^x - e^x + C)' = e^x + xe^x - e^x = xe^x$$

vilket medför att våra uträkningar stämmer.