Krzysztof Marciniak, ITN
Linköpings universitet
tfn 011-36 33 20
krzma@itn.liu.se

Lösningar till tentamen TEN1 i Envariabelanalys I (TNIU 22)

för BI

2013-03-25 kl. 14.00—19.00

1. a) Funktionen

$$f : [1, e] \to \mathbf{R}, \quad f(x) = \tan(\ln x)$$

är inverterbar ty, enligt kedjeregeln

$$f'(x) = \frac{1 + \tan^2(\ln(x))}{x}$$

så att $f'(x)$ är positiv på $D_f = [1, e]$ därför att ln ligger mellan 0 och 1 där och således $\tan(\ln(x))$ varierar från $\tan(0) = 0$ till $\tan(1) > 0$ (och eftersom naturligtvis $x > 0$ på $[1, e]$). Det betyder att funktionen är strängt växande och har således en invers.

b) Vi vet att $V_{f^{-1}} = D_f = [1, e]$. Vidare, eftersom f är strängt växande på D_f får vi att $D_{f^{-1}} = V_f = [f(1), f(e)] = [\tan(\ln 1), \tan(\ln e)] = [0, \tan 1]$ (förresten, $\tan 1 \approx 1.557$ är INTE $\pi/4$; det är $\tan \pi/4$ som är lika med 1). Det återstår då att bestämma formeln för f^{-1}. Detta gör vi genom att räkna ut x ur sambandet $y = f(x)$:

$$y = \tan(\ln x) \Leftrightarrow \ln x = \arctan y \Leftrightarrow x = e^{\arctan y} = f^{-1}(y)$$

där alla ekvivalenspiller gäller på de valda intervall då $x \in D_f = [1, e]$ och $y \in V_f = [0, \tan 1]$. Således, vi kan återkomma till variabeln x och hävda att

$$f^{-1} : [0, \tan 1] \to \mathbf{R}, \quad f^{-1}(x) = e^{\arctan x}$$

2. Vi börjar med att derivera funktionen två gånger. Vi använder kvotregeln och får

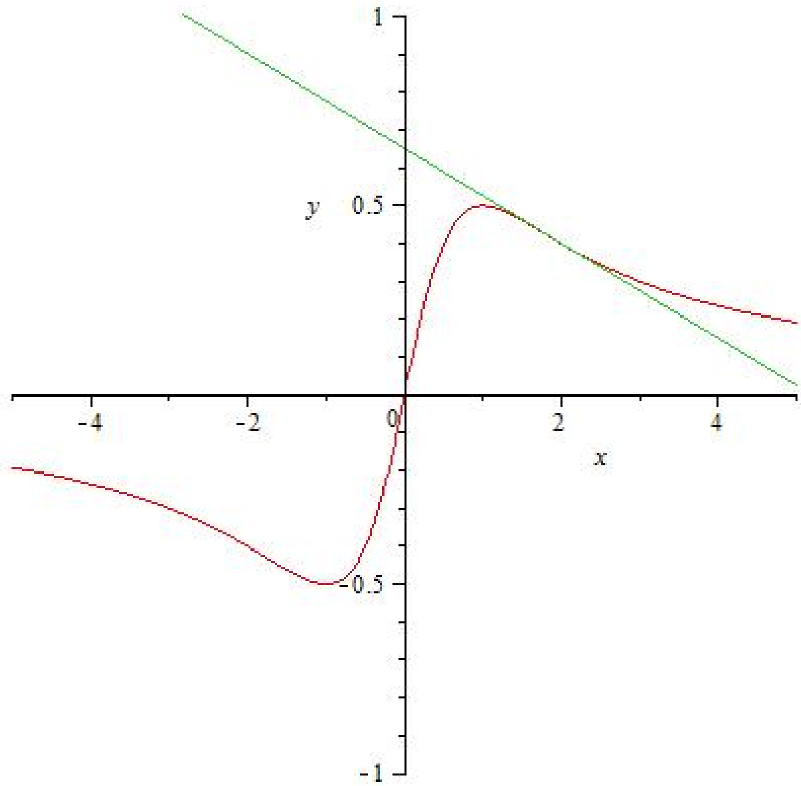
$$f'(x) = \frac{1 \cdot (1 + x^2) - x \cdot 2x}{(1 + x^2)^2} = \frac{1 - x^2}{(1 + x^2)^2}.$$

och sedan (kvotregeln igen):

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{-2x \cdot (1 + x^2)^2 - (1 - x^2) \cdot 2(1 + x^2) \cdot 2x}{(1 + x^2)^4} = \frac{-2x \cdot (1 + x^2) - (1 - x^2) \cdot 4x}{(1 + x^2)^3} = \\ &= \frac{-2x^3 - 2x - 4x + 4x^3}{(1 + x^2)^3} = \frac{2x^3 - 6x}{(1 + x^2)^3} = \frac{2x(x^2 - 3)}{(1 + x^2)^3}. \end{aligned}$$

Andraderivatans nollställen är således $x = 0$ samt $x = \pm\sqrt{3}$. En enkel teckenundersökning (notera att $(1 + x^2)^3 > 0$ alltid och påverkar således ej funktionens konvexitet) visar att 0 samt $\pm\sqrt{3}$ är funktionens samtliga inflektionspunkter. Således, uppgiften är att hitta tangenten till kurvan vid $x = \sqrt{3}$ för bara den punkten av alla de tre inflektionspunkterna uppfyller kravet $x > 0$. Vi vet att tangenten har formen $y = kx + m$ där

$$k = f'\left(\sqrt{3}\right) = \frac{1 - 3}{(1 + 3)^2} = -\frac{1}{8}.$$



Den sökta tangenten har således formen $y = -\frac{1}{8}x + m$ där m kan hittas genom att sätta tangentpunkten $\left(\sqrt{3}, f\left(\sqrt{3}\right)\right) = \left(\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$ i linjens ekvation. Enkel uträkning visar att $m = \frac{3\sqrt{3}}{8}$. Således, den sökta tangenten är

$$y = -\frac{1}{8}x + \frac{3\sqrt{3}}{8}$$

och både funktionen och tangenten kan ses ovan.

3. Ur derivatans definition får vi

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{\sin\left(h^2\right)}{h} - 0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sin\left(h^2\right)}{h^2} = 1.$$

enligt ett standardgränsvärde. Funktionen är således deriverbar i 0 (och därmed överallt).

4. a) Se boken, Sats 4.3 sid. 184.

b) Vi använder kedjeregeln:

i)

$$\frac{d}{dx}\left[\cos\left(\frac{1}{1+x^2}\right)\right] = -\sin\left(\frac{1}{1+x^2}\right)\cdot\left(-\frac{1}{\left(1+x^2\right)^2}\right)\cdot 2x = \frac{2x}{\left(1+x^2\right)^2}\sin\left(\frac{1}{1+x^2}\right).$$

ii)

$$\frac{d}{dx}\ln\left|x+\sqrt{x^2+7}\right| = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+7}}\left(1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2+7}}\right) = \frac{1}{\sqrt{x^2+7}},$$

vilket avspeglar naturligtvis det faktum att

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}}dx = \ln\left|x+\sqrt{x^2+a}\right| + C.$$

(se formeln (k) i Sats 5.2 sid. 239).

5. Enligt definition $re^{i\varphi} = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Således,

$$\begin{aligned} 2e^{i\pi/3} + \sqrt{2}e^{-i\pi/4} + i &= 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) + \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right) + i = \\ &= 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + i = 2 + i\sqrt{3} = re^{i\varphi}, \end{aligned}$$

där $r = \sqrt{2^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{7}$ medan φ ges t.ex. av $\varphi = \arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

6. a) Se Sats 4.10, sid. 202 i boken.

   b) Om $a = 0$ är olikheten klart uppfylld. Antag nu att $a > 0$. Vi tillämpar satsen i a) till funktionen $f(x) = e^x - 1 - x$ på intervallet $[0, a]$. Vi får då att det finns en punkt $t \in]0, a[$ sådan att

$$\frac{f(a) - f(0)}{a - 0} = f'(t)$$

   eller

$$\frac{e^a - 1 - a - (e^0 - 1 - 0)}{a} = e^t - 1,$$

   dvs

$$e^a - 1 - a = a(e^t - 1) > 0$$

   ty $e^t > 1$ för $t > 0$. Således, $e^a > 1 + a$ för $a > 0$. Genom att tillämpa satsen på intervallet $[a, 0]$ visar man att samma olikhet gäller även ifall $a < 0$. Notera att vi då har också visat att likhetstecken i olikheten gäller enbart vid $a = 0$.

7. a) Se Sats 5.4, sid. 242.

   b) Integralen

$$\int e^x \sin x \, dx$$

   beräknas genom att partiellintegrera den två gånger. Vi kan då välja att derivera trigonometriska funktioner och integrera e^x eller tvärtom, bara vi gör samma val två gånger. Om vi väljer att derivera trigonometriska funktioner får vi

$$\begin{aligned} \int e^x \sin x \, dx &= \left[\begin{array}{c} f = e^x,\ g = \sin x \\ F = e^x,\ g' = \cos x \end{array}\right] = e^x \sin x - \int e^x \cos x \, dx = \\ &= \left[\begin{array}{c} f = e^x,\ g = \cos x \\ F = e^x,\ g' = -\sin x \end{array}\right] = e^x \sin x - \left(e^x \cos x + \int e^x \sin x \, dx\right) \end{aligned}$$

   eller

$$\int e^x \sin x \, dx = e^x \sin x - e^x \cos x - \int e^x \sin x \, dx$$

   vilket ger

$$2\int e^x \sin x \, dx = e^x \sin x - e^x \cos x + C$$

   och slutligen

$$\int e^x \sin x \, dx = \frac{1}{2} e^x \left(\sin x - \cos x\right) + C'$$

   där $C' = \frac{C}{2}$. Kontrollderivera gärna så att du ser att resultatet är korrekt.