Krzysztof Marciniak, ITN
Linköpings universitet
tfn 011-36 33 20
krzma@itn.liu.se

Lösningar till tentamen TEN1 i Envariabelanalys I (TNIU 22)

för BI

2013-08-26 kl. 08.00—13.00

1. a) Gränsvärdet är av typ $\left[\frac{0}{0}\right]$ och vi skriver om det med hjälp av den välkända formeln

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \ldots + a^2b^{n-3} + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

vilket ger

$$\lim_{x\to -1} \frac{x^3+1}{x+1} = \lim_{x\to -1} \frac{x^3-(-1)}{x+1} = \lim_{x\to -1} \frac{(x+1)(x^2-x+1)}{x+1} = \lim_{x\to -1}(x^2-x+1) = 3$$

Alternativt, om vi inte känner formeln för $a^n - b^n$ ovan, kan vi faktorisera bort faktorn $x+1$ ur x^3+1 (enligt faktorsatsen) med hjälp av polynomdivision.

b) Vi förlänger och förkortar uttrycket med dess konjugat:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2-3x}\right) &= \lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2-3x}\right)\left(\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2-3x}\right)}{\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2-3x}} = \\ &= \lim_{x\to\infty}\frac{5x}{\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2-3x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{5}{\sqrt{1+\frac{2}{x}}+\sqrt{1-\frac{3}{x}}} = \frac{5}{2}\end{aligned}$$

c) Gränsvärdet är egentligen en kvot av två standardgränsvärden:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arctan x}{\sin 3x} = \lim_{x\to 0}\frac{\arctan x}{x}\cdot\frac{3x}{\sin 3x}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

ty både den första och den andra faktorn i produkten ovan går mot 1 då x går mot 0.

2. Ekvationen

$$\arcsin(2x) = \arccos(3x)$$

är definierad för $x \in \left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right]$ (annars faller $3x$ utanför intervallet $[-1,1]$ och HL är ej definierat). Vidare, $VL \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] = V_{\text{arcsin}}$ medan $HL \in [0,\pi] = V_{\text{arccos}}$ och därför måste vi ha att $VL = HL \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ vilket leder till att $x \in \left[0, \frac{1}{3}\right]$. Vi tillämpar nu sin ledvis till ekvationen. Vi får

$$2x = \sin(\arccos(3x)) = +\sqrt{1-\cos^2(\arccos(3x))} = \sqrt{1-(3x)^2}$$

(vi tar + när vi uttrycker sin som funktion av cos med hjälp av *trigettan* ty vi har precis konstaterat att $\arccos(3x) \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ och dess sin måste alltså vara positiv). Kvadrerar vi den uppkomna ekvationen (obs! falska rötter kan uppstå) får vi

$$4x^2 = 1 - 9x^2$$

eller

$$13x^2 = 1$$

dvs $x = -1/\sqrt{13} \notin \left[0, \frac{1}{3}\right]$ (som är alltså en falsk rot) eller $x = 1/\sqrt{13} \in \left[0, \frac{1}{3}\right]$ som är alltså en möjlig lösning. Ås så länge har vi bara visat att $\sin(HL) = \sin(VL)$ vid $x = 1/\sqrt{13}$ men eftersom $VL = HL \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ där ekvationen $\sin x = \sin y$ har bara en lösning $x = y$ (dvs sin är injektiv där) kan vi konstatera att $x = 1/\sqrt{13}$ är verkligen en lösning (den enda) till ekvationen. Man kan även lätt se att det finns högst en lösning ty VL är en strängt växande kontinuerlig funktion medan HL är en strängt avtagande kontinuerlig funktion så deras grafer kan träffas högst en gång.

3. a) Se boken, sid. 173.

b) Vi börjar med i). Enligt definitionen i a) och formeln för $\tan(\alpha+\beta)$ (se boken, sid. 98) får vi

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{\tan(x+h)-\tan x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{\tan x+\tan h}{1-\tan x\tan h}-\tan x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\tan x+\tan h-\tan x+\tan^2 x\tan h}{h(1-\tan x\tan h)} = \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{\tan h}{h}\cdot\frac{1+\tan^2 x}{1-\tan x\tan h} = 1+\tan^2 x \end{aligned}$$

därför att $\frac{\tan h}{h}\to 0$ då $h\to 0$ enligt ett standardgränsvärde. Dags för ii) Enligt definitionen i a)

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{\frac{x+h+1}{x+h+2}-\frac{x+1}{x+2}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h+1)(x+2)-(x+h+2)(x+1)}{h(x+h+2)(x+2)} = \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{x^2+2x+hx+2h+x+2-(x^2+x+hx+h+2x+2)}{h(x+h+2)(x+2)} = \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{h}{h(x+h+2)(x+2)} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{(x+h+2)(x+2)} = \frac{1}{(x+2)^2} \end{aligned}$$

vilket stämmer överens med uträkning av samma derivata med hjälp av kvotregeln (gör detta).

4. a) Funktionen

$$f:\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\to\mathbf{R},\ f(x)=\sin^3 x+\sin x$$

är inverterbar för att den är strängt växande, eftersom den är en summa av två växande på D_f funktioner. Man kan även beräkna f:s derivata:

$$f'(x)=3\sin^2 x\cos x+\cos x=\left(3\sin^2 x+1\right)\cos x>0 \text{ på } \left[0,\frac{\pi}{2}\right[$$

b) Vi noterar att $\frac{3}{2\sqrt{2}}=f(\frac{\pi}{4})$ så att, enligt satsen om derivatan av inversa funktionen (Sats 4.6 sid. 189) får vi

$$\left(f^{-1}\right)'\left(\frac{3}{2\sqrt{2}}\right)=\frac{1}{f'\left(\frac{\pi}{4}\right)}=\frac{1}{\left(3\sin^2\frac{\pi}{4}+1\right)\cos\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{\frac{5}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{4}{5\sqrt{2}}$$

5. Vi skall hitta alla komplexa tal som uppfyller ekvationen $z^2+2iz-5=0$. Det gör vi genom att kvadratkomplettera VL. Vi får $(z+i)^2-i^2-5=0$ eller $(z+i)^2=4$ ur vilket vi lätt hittar att ekvationen har två lösningar: $z_1=-2-i$ och $z_2=2-i$. Dessa rötter ligger *inte* symmetriskt med avseende på x-axeln ty ekvationen har komplexa koefficienter.

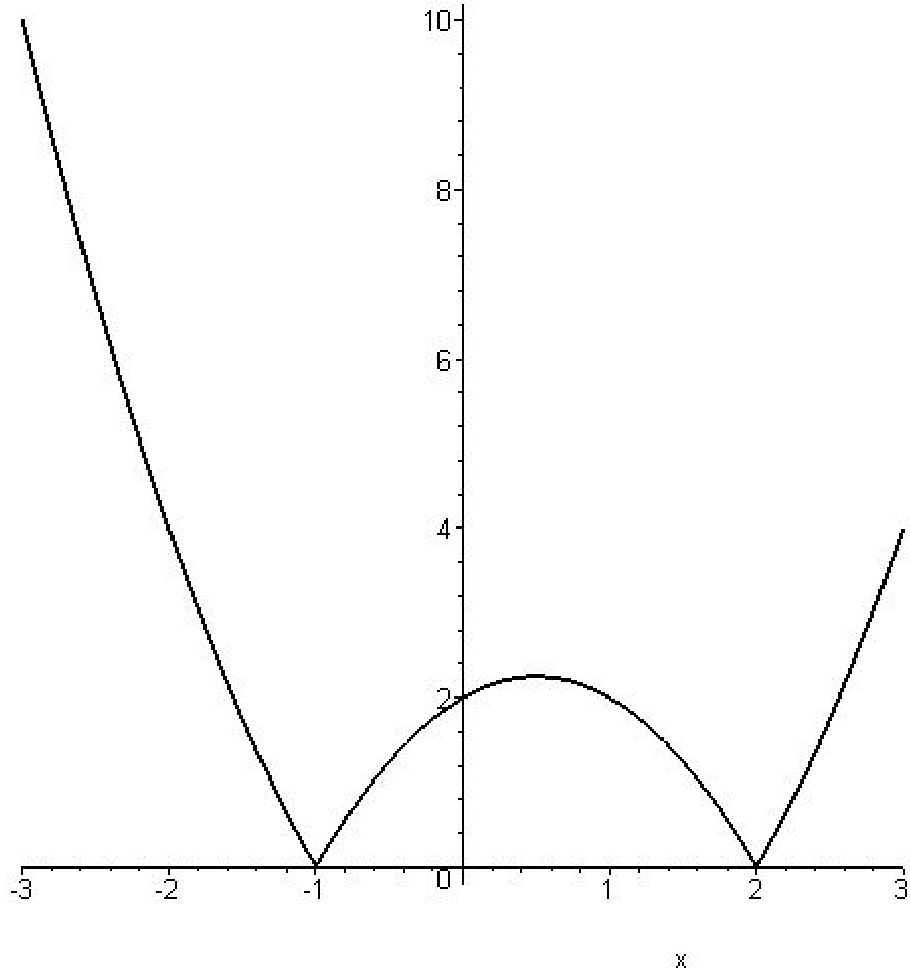
6. Vi vet att $f_{\max}$ och $f_{\min}$ antas ty f är kontinuerlig och definierad på ett slutet och begränsat intervall (sats 3.8 sid. 141). Vi vet dessutom att extrempunkter kan förekomma enbart vid ändpunkterna ± 3, singulära punkter och stationära punkter. Singulära punkter har vi där $x^2-x-2=0$ dvs vid -1 och 2. Stationära punkter får vi när vi löser ekvationen $f'(x)=0$. För att kunna göra det måste vi först beräkna derivatan. För att göra det skriver vi först om själva funktionen:

$$f(x)=\begin{cases} x^2-x-2 \text{ ifall } x^2-x-2\geq 0 \text{ dvs om } x\leq -1 \text{ eller } x\geq 2 \\ -x^2+x+2 \text{ ifall } x^2-x-2<0 \text{ dvs om } -1<x<2 \end{cases}$$

Nu deriverar vi:

$$f'(x)=\begin{cases} 2x-1 \text{ om } x<-1 \text{ eller } x>2 \\ \text{finns ej vid } x=-1 \text{ eller } x=2 \\ -2x+1 \text{ om } -1<x<2 \end{cases}$$

1



$_1.jpg$

och vi ser lätt att $x = \frac{1}{2}$ är den enda stationära punkten. Det är dags att jämföra funktionens värden i alla dessa punkter:

$$f(-3) = 10, \quad f(-1) = 0, \; f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{9}{4}, \quad f(2) = 0, \; f(3) = 4,$$

så att $f_{\max} = 10$ antas vid $x = -3$ medan $f_{\min} = 0$ antas vid -1 och 2 (funktionen är ritad på Figur 1).

7. a) Se Definition 5.1 på sid. 237 i boken.

   b) Vi har naturligtvis

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\, dx = \ln |f(x)| + C$$

   vilket kan lätt bevisas genom att derivera HL med hjälp av kedjeregeln:

$$(\ln |f(x)| + C)' = \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x) + 0.$$

   c) Enligt formeln i b)

$$\int \frac{1}{(1+x^2)\arctan x}\, dx = \ln |\arctan x| + C$$