Krzysztof Marciniak, ITN
Linköpings universitet
tfn 011-36 33 20
krzma@itn.liu.se

Lösningar till kontrollskrivningen KTR1 i Envariabelanalys II (TNIU 23)
för BI1

2009-02-06 kl. 8.00—10.00

1. a) Variabelbytet $y = x^4$ förenklar integralen:

$$\int x^3 e^{x^4} dx = \begin{bmatrix} y = x^4 \\ x^3 dx = \frac{1}{4} dy \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \int e^y \, dy = \frac{1}{4} e^y + C = \frac{1}{4} e^{x^4} + C.$$

b) Eftersom $1 - x^2 \geq 0$ på intervallet $[0, 1]$ men < 0 på $]1, 2]$ delar vi upp intervallet $[0, 2]$ i just dessa intervall:

$$\begin{aligned} \int_0^2 \left|1 - x^2\right| \, dx &= \int_0^1 \left(1 - x^2\right) \, dx - \int_1^2 \left(1 - x^2\right) \, dx = \left[x - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 - \left[x - \frac{x^3}{3}\right]_1^2 = \\ &= \left(1 - \frac{1}{3}\right) - \left(2 - \frac{8}{3} - 1 + \frac{1}{3}\right) = 2. \end{aligned}$$

Notera minustecknet mellan integralerna. Vet du var den kommer ifrån?

c) Integralen är generaliserad i ∞:

$$\int_1^\infty \frac{1}{(1 + x^2) \arctan x} \, dx = \lim_{R \to \infty} \int_1^R \frac{1}{(1 + x^2) \arctan x} \, dx.$$

Vi beräknar primitiven först, detta görs genom ett variabelbyte:

$$\int \frac{1}{(1 + x^2) \arctan x} \, dx = \begin{bmatrix} y = \arctan x \\ dy = \frac{dx}{1+x^2} \end{bmatrix} = \int \frac{dy}{y} = \ln|y| + C = \ln|\arctan x| + C.$$

Således:

$$\begin{aligned} \int_1^\infty \frac{1}{(1 + x^2) \arctan x} \, dx &= \lim_{R \to \infty} \int_1^R \frac{1}{(1 + x^2) \arctan x} \, dx = \\ &= \lim_{R \to \infty} \left[\ln|\arctan x|\right]_1^R = \lim_{R \to \infty} (\ln(\arctan R) - \ln(\arctan 1)) = \\ &= \ln\left(\frac{\pi}{2}\right) - \ln\left(\frac{\pi}{4}\right) = \ln 2, \end{aligned}$$

den sista likheten tack vare logaritmlagen $\ln(a/b) = \ln a - \ln b$ om $a, b > 0$.

2. Den sökta arean är naturligtvis lika med

$$\int_2^6 \frac{x+5}{x^2+2x-3}\,dx$$

och vi börjar med att ta fram en primitiv till integranden (notera också att täljarens nollställen 1 och -3 ligger utanför intervallet $[2,6]$ så att integralen är ej generaliserad). Eftersom integranden är en rationell funktion måste vi använda oss av vår 4-stegsmetod. Steg 1 (polynomdivision) behövs ej ty nämnarens grad är högre än taljarens. Steg 2 (faktorisering av nämnaren) ger enligt ovan att

$$x^2+2x-3=(x-1)(x+3).$$

Således (Steg 4) vi kan partialbråksuppdela integranden enligt ansatsen

$$\frac{x+5}{x^2+2x-3}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+3}$$

där handpåläggning eller anna metod ger att $A=\frac{3}{2}$ medan $B=-\frac{1}{2}$. Vi kan alltså utföra integration (Steg 4):

$$\begin{aligned}\int_2^6 \frac{x+5}{x^2+2x-3}\,dx &= \int_2^6 \left(\frac{3}{2}\frac{1}{x-1}-\frac{1}{2}\frac{1}{x+3}\right)dx = \\ &= \left[\frac{3}{2}\ln|x-1|-\frac{1}{2}\ln|x+3|\right]_2^6 = \\ &= \frac{3}{2}\ln 5-\frac{1}{2}\ln 9-\frac{3}{2}\ln 1+\frac{1}{2}\ln 5 = 2\ln 5-\ln 3\end{aligned}$$

ty $\ln 9=\ln 3^2=2\ln 3$.

3. Den sökta längden ges av den generaliserade integralen

$$l=\int_0^\infty \sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\,dt.$$

Vi räknar först ut integranden: en enkel derivering visar att

$$\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}=\sqrt{2}e^{-t}.$$

Således

$$l=\sqrt{2}\int_0^\infty e^{-t}\,dt=\sqrt{2}\lim_{R\to\infty}\left[-e^{-t}\right]_0^R=\sqrt{2}\lim_{R\to\infty}\left(1-e^{-R}\right)=\sqrt{2}.$$

4. a) Se boken, Sats 6.7 sid. 290.

b) Låt oss beteckna en primitv till $f(t) = \frac{\tan t}{\ln t}$ med $F(t)$. Då gäller enligt insättningsformeln (sid. 292) samt kedjeregeln att

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left(\int_1^{\arctan x} \frac{\tan t}{\ln t}\,dt\right) &= \frac{d}{dx}\left(F(\arctan x) - F(1)\right) = F'(\arctan x)\cdot(\arctan x)' = \\ &= \frac{f(\arctan x)}{1+x^2} = \frac{\tan(\arctan x)}{(1+x^2)\ln(\arctan x)} = \frac{x}{(1+x^2)\ln(\arctan x)}.\end{aligned}$$