

Lösningar till tentamen TEN1 i Envariabelanalys II (TNIU 23)
för BI

2009-03-13 kl. 08.00-13.00

1. a) Se boken sid. 386.

b) Ekvationen

$$xy' + 2y = e^x$$

är linjär av 1:a ordningen varför integrerande faktor kan hittas. Först måste vi dock dela ledvis ekvationen med x , vilket ger

$$y' + \frac{2}{x}y = \frac{e^x}{x}, \quad x \neq 0 \quad (1)$$

med integrerande faktorn

$$h(x) = e^{\int \frac{2}{x} dx} = e^{2\ln|x|} = x^2.$$

Multipliserar vi ekvationen (1) med h får vi

$$x^2y' + 2xy = xe^x$$

Vänsterledet är då (detta kan kollas via derivering) lika med $(x^2y)'$ så att ekvationen antar formen

$$(x^2y)' = xe^x$$

så att

$$x^2y = \int xe^x dx = xe^x - e^x + C$$

där integralen på högerledet hittas via partiellintegration. Det betyder att den allmänna lösningen till vår ekvation blir

$$y(x) = \frac{e^x}{x} - \frac{e^x}{x^2} + \frac{C}{x^2}, \quad x \neq 0.$$

2. Vi betraktar alltså differentialekvationen

$$y'' + y' = 2x - \sin x. \quad (2)$$

Vi börjar med att hitta den allmänna lösningen y_h till den homogena ekvationen $y'' + y' = 0$. Den karakteristiska ekvationen är $r^2 + r = 0$ eller $r(r+1) = 0$ som har två skilda reella rötter: $r_1 = 0$ samt $r_2 = -1$. Således, y_h ges av

$$y_h = C_1 + C_2e^{-x}.$$

Nu behöver vi en partikulärlösning till hela ekvationen (2). Om vi utnyttjar ekvationens linjäritet kan vi anta att $y_p = y_{p1} - y_{p2}$ där y_{p1} löser $y'' + y' = 2x$ medan y_{p2} löser $y'' + y' = \sin x$. En bra ansats för y_{p1} är (se boken sid. 406) $y_{p1} = x(Ax + B) = Ax^2 + Bx$. Sätter vi in den i $y'' + y' = 2x$ hittar vi att $y_{p1} = x^2 - 2x$. En korrekt ansats för y_{p2} är $y_{p2} = A \sin x + B \cos x$ som insatt i $y'' + y' = \sin x$ ger $y_{p2} = -\frac{1}{2} \sin x - \frac{1}{2} \cos x$. Det betyder att en partikulärlösning för hela (2) är

$$y_p = x^2 - 2x + \frac{1}{2} \sin x + \frac{1}{2} \cos x$$

så att A.L. för (2) blir

$$y = y_h + y_p = C_1 + C_2 e^{-x} + x^2 - 2x + \frac{1}{2} \sin x + \frac{1}{2} \cos x. \quad (3)$$

Vi kan nu besvara frågan i uppgiften. Omformulerad, lyder den så här: finns det någon lösning bland lösningarna i (3) som uppfyller begynnelsevillkor $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$? Stoppar vi in dessa villkor i (3) får vi $C_1 + C_2 + \frac{1}{2} = 0$ respektive $-C_2 - \frac{3}{2} = 0$ vilket ger $C_1 = 1$, $C_2 = -\frac{3}{2}$. Man kan alltså hitta en sådan lösning och den är

$$y = 1 - \frac{3}{2} e^{-x} + x^2 - 2x + \frac{1}{2} \sin x + \frac{1}{2} \cos x.$$

3. Den sökta volymen ges av en integral som är generaliserad i ∞ :

$$V = \pi \int_1^{\infty} (e^{-x})^2 dx = \pi \int_1^{\infty} e^{-2x} dx = \pi \lim_{R \rightarrow \infty} \int_1^R e^{-2x} dx = \pi \lim_{R \rightarrow \infty} \left[\frac{e^{-2x}}{-2} \right]_1^R = \frac{\pi}{2} \lim_{R \rightarrow \infty} (e^{-2} - e^{-2R}) = \frac{\pi}{2} e^{-2}.$$

4. Integralen

$$\int \frac{2x + 1}{x^3 + 3x^2 + 2x} dx$$

löser vi med hjälp av vår 4-stegsmetod. Steg 1 (=polynomdivision) behövs ej ty polynomet i nämnaren har högre gradtal än polynomet i täljaren. Steg 2 - faktorisering av nämnaren - ger

$$x^3 + 3x^2 + 2x = x(x^2 + 3x + 2) = x(x+1)(x+2)$$

så nämnaren innehåller tre enkla rötter. Det betyder att integranden kan skrivas om som (Steg 3)

$$\frac{2x + 1}{x^3 + 3x^2 + 2x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x+2}$$

och handpåläggnen (eller andra metoder) ger $A = \frac{1}{2}$, $B = 1$, $C = -\frac{3}{2}$. Det betyder att

$$\frac{2x + 1}{x^3 + 3x^2 + 2x} = \frac{1/2}{x} + \frac{1}{x+1} - \frac{3/2}{x+2}$$

och därför (Steg 4):

$$\int \frac{2x + 1}{x^3 + 3x^2 + 2x} dx = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x} + \int \frac{dx}{x+1} - \frac{3}{2} \int \frac{dx}{x+2} = \frac{1}{2} \ln|x| + \ln|x+1| - \frac{3}{2} \ln|x+2| + C.$$

5. a) Funktionen

$$f(x) = \begin{cases} a \cos^2 x & \text{för } -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$

är ≥ 0 så den är en täthetsfunktion så snart $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$. Men

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = a \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 x dx = 2a \int_0^{\pi/2} \cos^2 x dx = 2a \int_0^{\pi/2} \frac{1 + \cos 2x}{2} dx = 2a \left[\frac{1}{2}x + \frac{1}{4} \sin 2x \right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi a}{2}$$

så att a måste väljas som $a = \frac{2}{\pi}$.

b) Man inser snabbt att $E(X) = 0$ ty f är en jämn funktion. Vi har ju, enligt definitionen av $E(X)$:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = \frac{2}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} x \cos^2 x dx = 0$$

ty integranden är en udda funktion och integrationsintervall har mittpunkten i origo.

c) Vidare (se beräkningen av a ovan)

$$P(0 \leq X \leq \frac{\pi}{4}) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/4} \cos^2 x dx = \frac{2}{\pi} \left[\frac{1}{2}x + \frac{1}{4} \sin 2x \right]_0^{\pi/4} = \frac{2}{\pi} \left(\frac{\pi}{8} + \frac{1}{4} \right) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2\pi} \approx 0,41.$$

(den numeriska approximationen krävs förstås ej på tentamen).

6. a) Se boken, Sats 8.2 sid. 358.

b) Vid bägge gränsvärden använder vi oss av kända Maclaurinutvecklingar. Vi börjar med i):

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - x + \frac{1}{2}x^2}{x^3} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + O(x^4) - x + \frac{1}{2}x^2}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{3}x^3 + O(x^4)}{x^3} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{3} + O(x) \right) = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Nu till ii):

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \frac{x^3}{3!} + O(x^5) - x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{x^3}{3!} + O(x^5)}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{6} + O(x^2) \right) = -\frac{1}{6}.$$

7. a) Se Sats 6.7 sid. 290.

b) Sambandet

$$y(x) = x + \int_0^x y^2(t) dt. \tag{4}$$

kan deriveras ledvis med hjälp av analysens huvudsats; vi får då differentialekvationen

$$y'(x) = 1 + y^2(x)$$

som är separabel och kan skrivas om som

$$\frac{dy}{1+y^2} = dx.$$

Integrerar vi ledvis får vi den allmänna lösningen på en implicit form

$$\arctan y = x + C.$$

Men, ur (4) följer att

$$y(0) = 0 + \int_0^0 y^2(t) dt = 0$$

som ger att $C = 0$. Således, det finns bara en lösning till vårt problem, funktionen $\arctan y = x$ eller, i explicit form, $y = \tan x$. Man kan faktiskt kontrollera detta ty

$$\int (\tan t)^2 dt = \tan t - t + C.$$