Krzysztof Marciniak, ITN
Linköpings universitet
tel. 011-36 33 20
e-post: krzma@itn.liu.se

Lösningar till tentamen TEN1 i Envariabelanalys II (TNIU 23)
för BI
2009–06–10 kl. 08.00-13.00

1. a) Se boken, sid. 391.

   b) Ekvationen
$$y' = \left(1+y^2\right)\left(1-x^2\right)$$
skriver vi om i separerad form
$$\frac{dy}{1+y^2} = \left(1-x^2\right) dx$$
vilket ger
$$\int \frac{dy}{1+y^2} = \int \left(1-x^2\right) dx$$
eller
$$\arctan y = x - \frac{x^3}{3} + C.$$
Villkoret $y(0) = 1$ ger då att $\arctan 1 = C$ eller $C = \frac{\pi}{4}$. Således, den sökta lösningen är
$$\arctan y = x - \frac{x^3}{3} + \frac{\pi}{4}$$
eller på explicit form
$$y = \tan\left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{\pi}{4}\right).$$

2. Vi letar först efter den homogen lösningen y_h. Den karakteristiska ekvationen $r^2+1=0$ har två komplex konjugerade rötter $\pm i$ varför
$$y_h = A\cos x + B\sin x.$$
Det återstår att hitta en lösning y_p till hela ekvationen. Vi gör en ansatz $y_p = z(x)e^{2x}$. Stoppar vi in detta i vår differentialekvation får vi
$$e^{2x}\left(z'' + 4z' + 5z\right) = xe^{2x}$$
eller
$$z'' + 4z' + 5z = x$$
som vi löser genom att postulera en ansatz $z_p = Ax + B$. Insatt i ekvationen ovan ger den att $z_p = \frac{1}{5}x - \frac{4}{25}$. Således, $y_p = \left(\frac{1}{5}x - \frac{4}{25}\right)e^{2x}$ och den allmänna lösningen till hela ekvationen blir
$$y = y_h + y_p = A\cos x + B\sin x + \left(\frac{1}{5}x - \frac{4}{25}\right)e^{2x}.$$

3. a) Eftersom

$$\begin{aligned} P(-a &\leq X \leq a) = F(a) - F(-a) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\arctan a - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\arctan(-a)\right) = \\ &= \frac{2}{\pi}\arctan a, \end{aligned}$$

kravet $P(-a \leq X \leq a) = \frac{2}{\pi}$ betyder att $\arctan a = 1$ eller att $a = \tan 1 = \pi/4$.

b) Nedre kvartil är lösning av ekvationen $F(x) = 0,25 = \frac{1}{4}$ vilket ger

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\arctan x = \frac{1}{4}$$

eller

$$\arctan x = -\frac{\pi}{4}$$

som ger $x_{0,25} = \tan\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -1$ (notera att $-\frac{\pi}{4}$ ligger i "det rätta intervallet" $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$). På liknande sätt, genom att lösa ekvationen $F(x) = 0,75 = \frac{3}{4}$, får vi att $x_{0,75} = 1$.

4. Kurvans längd ges av

$$\begin{aligned} l &= \int_0^{\pi/3} \sqrt{[r(\varphi)]^2 + [r'(\varphi)]^2}\, d\varphi = \int_0^{\pi/3} \sqrt{e^{6\varphi} + 9e^{6\varphi}}\, d\varphi = \sqrt{10}\int_0^{\pi/3} e^{3\varphi}\, d\varphi = \\ &= \sqrt{10}\left[\frac{e^{3\varphi}}{3}\right]_0^{\pi/3} = \frac{\sqrt{10}}{3}\left(e^{\pi} - 1\right). \end{aligned}$$

5. Den sökta arean ges av integralen

$$\begin{aligned} A &= 2\pi\int_0^1 y(x)\sqrt{1 + [y'(x)]^2}\, dx = 2\pi\int_0^1 2\sqrt{x}\sqrt{1 + \frac{1}{x}}\, dx = 4\pi\int_0^1 \sqrt{x}\sqrt{\frac{x+1}{x}}\, dx = \\ &= 4\pi\int_0^1 \sqrt{x+1}\, dx = 4\pi\left[\frac{(x+1)^{3/2}}{3/2}\right]_0^1 = \frac{8\pi}{3}\left(2\sqrt{2} - 1\right). \end{aligned}$$

6. a) Vi använder oss av standard Maclaurinutvecklig för $\arctan x$:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0}\frac{\arctan x - x}{x^3} &= \lim_{x\to 0}\frac{x - \frac{x^3}{3} + O(x^5) - x}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{x^3}{3} + O(x^5)}{x^3} = \\ &= \lim_{x\to 0}\left(-\frac{1}{3} + O(x^2)\right) = -\frac{1}{3}. \end{aligned}$$

b)

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{x}\left(x + O(x^2)\right)} = \lim_{x\to 0} e^{1+O(x)} = e,$$

som är förresten ett standardgräsnvärde.

7. a) Se Sats 6.5 sid. 288.

b) Enligt medelvärdessatsen för integraler

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_{-x}^{x} f(t)\, dt = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\cdot f(\zeta)\cdot(x - (-x)) = 2\lim_{x\to 0} f(\zeta)$$

för något ζ mellan $-x$ och x. Eftersom $\zeta \to 0$ då $x \to 0$ och eftersom f är kontinuerlig i 0 blir resultatet lika med $2f(0)$.