Krzysztof Marciniak, ITN
Linköpings universitet
tel. 011-36 33 20
e-post: krzma@itn.liu.se

Lösningar till tentamen TEN1 i Envariabelanalys II (TNIU 23)

för BI

2009–08–18 kl. 14.00-19.00

1. a) Se boken sid. 386 och 387.

   b) Vår differentialekvation är linjär av 1:a ordningen så vi löser den med hjälp av integrerande faktor. I detta fall
$$h(x) = e^{\int \tan x\, dx} = e^{-\ln|\cos x|} = \frac{1}{|\cos x|} = \pm\frac{1}{\cos x}$$
   så vi väljer $h(x) = \frac{1}{\cos x}$. Vi multiplicerar nu ledvis ekvationen med $h(x)$ och får
$$\frac{y'}{\cos x} + \frac{y \sin x}{\cos^2 x} = \frac{\sin 2x}{\cos x} = 2\sin x.$$
   Högerledet är, som det är lätt att kolla, är en derivata av $yh(x)$. Vi får alltså
$$\left(\frac{y}{\cos x}\right)' = 2\sin x$$
   eller
$$\frac{y}{\cos x} = 2\int \sin x\, dx = -2\cos x + C$$
   så att den allmänna lösningen till ekvationen blir
$$y(x) = -2\cos^2 x + C\cos x.$$
   Villkoret $y(0) = 2$ ger nu
$$2 = -2 + C$$
   så att $C = 4$. Den sökta lösningen är således
$$y(x) = -2\cos^2 x + 4\cos x.$$

2. Vi börjar med y_h dvs den allmänna lösningen för den homogena delen av ekvationen. Den karakteristiska ekvationen $r^2 + r - 2 = 0$ har rötter $r_1 = 1$ och $r_2 = -2$ så att
$$y_h = C_1 e^x + C_2 e^{-2x}.$$
   En bra ansats för en partikulär lösning y_p är (se sid. 406 i boken) $y_p = Ax + B$ vilket insatt i ekvationen ger snabbt att $y_p = -2x - 1$. Således, den allmänna lösningen till vår ekvation är
$$y = y_h + y_p = C_1 e^x + C_2 e^{-2x} - 2x - 1.$$
   Vi kan lätt kontrollera detta genom att sätta in lösningen tillbaka i den ursprungliga ekvationen.

3. Funktionen f är icke-negativ oavsett av a så vi måste välja a så att det andra kravet - det att $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$ - blir uppfyllt. Men
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = \int_0^a x^2\, dx = \frac{1}{3}a^3$$

så att $\frac{1}{3}a^3 = 1$ eller $a = \sqrt[3]{3} = 3^{1/3}$.

b) Vi börjar med väntevärde för X:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,dx = \int_0^{3^{1/3}} x^3\,dx = \frac{1}{4}\left[x^4\right]_0^{3^{1/3}} = \frac{3^{4/3}}{4} = \frac{3}{4}\sqrt[3]{3}.$$

Vidare

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,dx = \int_0^{3^{1/3}} x^4\,dx = \frac{1}{5}\left[x^5\right]_0^{3^{1/3}} = \frac{3^{5/3}}{5}$$

så att

$$\begin{aligned} V(X) &= E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{3^{5/3}}{5} - \left(\frac{3^{4/3}}{4}\right)^2 = \frac{3^{5/3}}{5} - \frac{3^{8/3}}{16} = \frac{1}{80}\left(16\cdot 3^{5/3} - 5\cdot 3^{8/3}\right) = \\ &= \frac{3^{5/3}}{80}(16 - 5\cdot 3) = \frac{3^{5/3}}{80}. \end{aligned}$$

4. a) Se Sats 8.2 sid. 358.

b) Vi använder oss av en enkel omskrivning samt en känd utveckling:

$$\begin{aligned} \sin x\cos x &= \frac{1}{2}\sin 2x = \frac{1}{2}\left((2x) - \frac{(2x)^3}{3!} + \frac{(2x)^5}{5!} + O((2x)^7)\right) = \\ &= x - \frac{2}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + O(x^7). \end{aligned}$$

Således, det sökta polynomet är

$$p_5(x) = x - \frac{2}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5.$$

5. Den sökta volymen ges av den generaliserade integralen (se rörformeln på sid. 328):

$$\begin{aligned} V &= 2\pi\int_2^{\infty} xy(x)\,dx = 2\pi\int_2^{\infty}\frac{1}{x^2}\,dx = 2\pi\lim_{R\to\infty}\int_2^{R}\frac{1}{x^2}\,dx = 2\pi\lim_{R\to\infty}\left[-\frac{1}{x}\right]_2^R = \\ &= 2\pi\lim_{R\to\infty}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{R}\right) = \pi. \end{aligned}$$

6. Den sökta mantelarean ges också av en generaliserad integral:

$$A = 2\pi\int_2^{\infty} x\,ds = 2\pi\int_2^{\infty} x\sqrt{1 + [y'(x)]^2}\,dx,$$

men eftersom $\sqrt{1 + [y'(x)]^2} \geq 1$ kan vi konstatera att

$$A \geq 2\pi\int_2^{\infty} x\,dx$$

vilket naturligtvis divergerar.

7. Integralen i uttrycket kan uträknas, men det finns ett snabbare sätt: Om F betecknar en primitiv till $f(t) = \arcsin t$ så har vi enligt insättningsformeln och vidare kedjeregeln:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\left(\int_{\sin x}^{\sin 2x} \arcsin t \, dt\right) &= \frac{d}{dx}\left(F(\sin 2x) - F(\sin x)\right) = \\
&= F'(\sin 2x) \cdot 2\cos 2x - F'(\sin x) \cdot \cos x = \\
&= 2f(\sin 2x)\cos 2x - f(\sin x)\cos x = \\
&= 2\arcsin(\sin 2x)\cos 2x - \arcsin(\sin x)\cos x = \\
&= 4x\cos 2x - x\cos x = x(4\cos 2x - \cos x) = x(8\cos^2 x - \cos x - 4).
\end{aligned}$$

där vi alltså utnyttjat att $\arcsin(\sin 2x) = 2x$ samt $\arcsin(\sin x) = x$ för $x \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$.