Krzysztof Marciniak, ITN
Linköpings universitet
tel. 011-36 33 20
e-post: krzma@itn.liu.se

Lösningar till tentamen TEN2 i Envariabelanalys (TNIU 70)
för BI
2009–03–13 kl. 08.00-13.00

1. a) Se boken sid. 386.

   b) Ekvationen
$$xy' + 2y = e^x$$
är linjär av 1:a ordningen varför integrerande faktor kan hittas. Först måste vi dock dela ledvis ekvationen med x, vilket ger
$$y' + \frac{2}{x}y = \frac{e^x}{x}, \quad x \neq 0 \tag{1}$$
med integrerande faktorn
$$h(x) = e^{\int \frac{2}{x}\,dx} = e^{2\ln|x|} = x^2.$$
Multiplicerar vi ekvationen (1) med h får vi
$$x^2y' + 2xy = xe^x$$
Vänsterledet är då (detta kan kollas via derivering) lika med $\left(x^2y\right)'$ så att ekvationen antar formen
$$\left(x^2y\right)' = xe^x$$
så att
$$x^2y = \int xe^x\,dx = xe^x - e^x + C$$
där integralen på högerledet hittas via partiellintegration. Det betyder att den allmänna lösningen till vår ekvation blir
$$y(x) = \frac{e^x}{x} - \frac{e^x}{x^2} + \frac{C}{x^2}, \quad x \neq 0.$$

2. Vi betraktar alltså differentialekvationen
$$y'' + y' = 2x - \sin x. \tag{2}$$
Vi börjar med att hitta den allmänna lösningen y_h till den homogena ekvationen $y'' + y' = 0$. Den karakteristiska ekvationen är $r^2 + r = 0$ eller $r(r+1) = 0$ som har två skilda reella rötter: $r_1 = 0$ samt $r_2 = -1$. Således, y_h ges av
$$y_h = C_1 + C_2e^{-x}.$$
Nu behöver vi en partikulärlösning till hela ekvationen (2). Om vi utnyttjar ekvationens linjäritet kan vi anta att $y_p = y_{p_1} - y_{p_2}$ där y_{p_1} löser $y'' + y' = 2x$ medan y_{p_2} löser $y'' + y' = \sin x$. En bra ansats för y_{p_1} är (se boken sid. 406) $y_{p_1} = x(Ax + B) = Ax^2 + Bx$. Sätter vi in den i $y'' + y' = 2x$ hittar vi att $y_{p_1} = x^2 - 2x$. En korrekt ansats för y_{p_2} är $y_{p_2} = A\sin x + B\cos x$ som insatt i $y'' + y' = \sin x$ ger $y_{p_2} = -\frac{1}{2}\sin x - \frac{1}{2}\cos x$. Det betyder att en partikulärlösning för hela (2) är
$$y_p = x^2 - 2x + \frac{1}{2}\sin x + \frac{1}{2}\cos x$$

så att A.L. för (2) blir

$$y = y_h + y_p = C_1 + C_2 e^{-x} + x^2 - 2x + \frac{1}{2}\sin x + \frac{1}{2}\cos x. \tag{3}$$

Vi kan nu besvara frågan i uppgiften. Omformulerad, lyder den så här: finns det någon lösning bland lösningarna i (3) som uppfyller begynnelsevillkor $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$? Stoppar vi in dessa villkor i (3) får vi $C_1 + C_2 + \frac{1}{2} = 0$ respektive $-C_2 - \frac{3}{2} = 0$ vilket ger $C_1 = 1, C_2 = -\frac{3}{2}$. Man kan alltså hitta en sådan lösning och den är

$$y = 1 - \frac{3}{2}e^{-x} + x^2 - 2x + \frac{1}{2}\sin x + \frac{1}{2}\cos x.$$

3. Den sökta volymen ges av en integral som är generaliserad i ∞:

$$V = \pi \int_1^\infty \left(e^{-x}\right)^2 dx = \pi \int_1^\infty e^{-2x}\, dx = \pi \lim_{R\to\infty} \int_1^R e^{-2x}\, dx = \pi \lim_{R\to\infty} \left[\frac{e^{-2x}}{-2}\right]_1^R = \frac{\pi}{2} \lim_{R\to\infty} \left(e^{-2} - e^{-2R}\right) = \frac{\pi}{2}e^{-2}.$$

4. Integralen

$$\int \frac{2x+1}{x^3+3x^2+2x}\, dx$$

löser vi med hjälp av vår 4-stegsmetod. Steg 1 (=polynomdivision) behövs ej ty polynomet i nämnaren har högre gradtal än polynomet i täljaren. Steg 2 - faktorisering av nämnaren - ger

$$x^3 + 3x^2 + 2x = x\left(x^2 + 3x + 2\right) = x(x+1)(x+2)$$

så nämnaren innehåller tre enkla rötter. Det betyder att integranden kan skrivas om som (Steg 3)

$$\frac{2x+1}{x^3+3x^2+2x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x+2}$$

och handpåläggningen (eller andra metoder) ger $A = \frac{1}{2}$, $B = 1$, $C = -\frac{3}{2}$. Det betyder att

$$\frac{2x+1}{x^3+3x^2+2x} = \frac{1/2}{x} + \frac{1}{x+1} - \frac{3/2}{x+2}$$

och därför (Steg 4):

$$\int \frac{2x+1}{x^3+3x^2+2x}\, dx = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x} + \int \frac{dx}{x+1} - \frac{3}{2}\int \frac{dx}{x+2} = \frac{1}{2}\ln|x| + \ln|x+1| - \frac{3}{2}\ln|x+2| + C.$$

5. a) Se boken, Sats 5.4 sid. 246. (1p)

b) Vi börjar med i). Vi partiellintegrerar uttrycket två gånger, varje gång deriverar vi polynomet:

$$\begin{aligned}
\int x^2 \sin x\, dx &= \begin{bmatrix} f = x^2, & f' = 2x \\ g' = \sin x, & g = -\cos x \end{bmatrix} = -x^2\cos x + 2\int x\cos x\, dx = \\
&= \begin{bmatrix} f = x, & f' = 1 \\ g' = \cos x, & g = \sin x \end{bmatrix} = -x^2\cos x + 2\left(x\sin x - \int \sin x\, dx\right) = \\
&= -x^2\cos x + 2x\sin x + 2\cos x + C.
\end{aligned}$$

Nu till ii). Den här gånger integrerar vi polynomet och deriverar ln:

$$\begin{aligned}
\int x^2 \ln x\, dx &= \begin{bmatrix} f = \ln x, & f' = \frac{1}{x} \\ g' = x^2, & g = \frac{x^3}{3} \end{bmatrix} = \frac{1}{3}x^3\ln x - \frac{1}{3}\int \frac{x^3}{x}\, dx = \\
&= \frac{1}{3}x^3\ln x - \frac{1}{9}x^3 + C = \frac{1}{3}x^3\left(\ln x - \frac{1}{3}\right) + C.
\end{aligned}$$

(1+1p)

6. a) Se boken, Sats 8.2 sid. 358.

b) Vid bägge gränsvärden använder vi oss av kända Maclaurinutvecklingar. Vi börjar med i):

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-x+\frac{1}{2}x^2}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+O(x^4)-x+\frac{1}{2}x^2}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{3}x^3+O(x^4)}{x^3} =$$
$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{3}+O(x)\right) = \frac{1}{3}.$$

Nu till ii):

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{x-\frac{x^3}{3!}+O(x^5)-x}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{x^3}{3!}+O(x^5)}{x^3} = \lim_{x\to 0}\left(-\frac{1}{6}+O(x^2)\right) = -\frac{1}{6}.$$

7. a) Se Sats 6.7 sid. 290.

b) Sambandet

$$y(x) = x + \int_0^x y^2(t)\,dt. \tag{4}$$

kan deriveras ledvis med hjälp av analysens huvudsats; vi får då differentialekvationen

$$y'(x) = 1 + y^2(x)$$

som är separabel och kan skrivas om som

$$\frac{dy}{1+y^2} = dx.$$

Integrerar vi ledvis får vi den allmänna lösningen på en implicit form

$$\arctan y = x + C.$$

Men, ur (4) följer att

$$y(0) = 0 + \int_0^0 y^2(t)\,dt = 0$$

som ger att $C = 0$. Således, det finns bara en lösning till vårt problem, funktionen $\arctan y = x$ eller, i explicit form, $y = \tan x$. Man kan faktiskt kontrollera detta ty

$$\int (\tan t)^2\,dt = \tan t - t + C.$$