

**Lösningar till tentamen TEN2 i Envariabelanalys (TNIU 70)**  
för BI

2009-06-10 kl. 08.00-13.00

1. a) Se boken, sid. 391.

b) Ekvationen

$$y' = (1 + y^2)(1 - x^2)$$

skriver vi om i separerad form

$$\frac{dy}{1 + y^2} = (1 - x^2) dx$$

vilket ger

$$\int \frac{dy}{1 + y^2} = \int (1 - x^2) dx$$

eller

$$\arctan y = x - \frac{x^3}{3} + C.$$

Villkoret  $y(0) = 1$  ger då att  $\arctan 1 = C$  eller  $C = \frac{\pi}{4}$ . Således, den sökta lösningen är

$$\arctan y = x - \frac{x^3}{3} + \frac{\pi}{4}$$

eller på explicit form

$$y = \tan\left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{\pi}{4}\right).$$

2. Vi letar först efter den homogena lösningen  $y_h$ . Den karakteristiska ekvationen  $r^2 + 1 = 0$  har två komplex konjugerade rötter  $\pm i$  varför

$$y_h = A \cos x + B \sin x.$$

Det återstår att hitta en lösning  $y_p$  till hela ekvationen. Vi gör en ansatz  $y_p = z(x)e^{2x}$ . Stoppar vi in detta i vår differentialekvation får vi

$$e^{2x} (z'' + 4z' + 5z) = xe^{2x}$$

eller

$$z'' + 4z' + 5z = x$$

som vi löser genom att postulera en ansatz  $z_p = Ax + B$ . Insatt i ekvationen ovan ger den att  $z_p = \frac{1}{5}x - \frac{4}{25}$ . Således,  $y_p = \left(\frac{1}{5}x - \frac{4}{25}\right)e^{2x}$  och den allmänna lösningen till hela ekvationen blir

$$y = y_h + y_p = A \cos x + B \sin x + \left(\frac{1}{5}x - \frac{4}{25}\right)e^{2x}.$$

3. a) Vi partiellintegrerar två gånger:

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/4} e^x \sin x \, dx &= \left[ \begin{array}{l} f' = e^x, \quad f = e^x \\ g = \sin x, \quad g' = \cos x \end{array} \right] = [e^x \sin x]_0^{\pi/4} - \int_0^{\pi/4} e^x \cos x \, dx = \\ &= \left[ \begin{array}{l} f' = e^x, \quad f = e^x \\ g = \cos x, \quad g' = -\sin x \end{array} \right] = [e^x \sin x]_0^{\pi/4} - \left( [e^x \cos x]_0^{\pi/4} + \int_0^{\pi/4} e^x \sin x \, dx \right) = \\ &= [e^x \sin x]_0^{\pi/4} - [e^x \cos x]_0^{\pi/4} - \int_0^{\pi/4} e^x \sin x \, dx, \end{aligned}$$

så att

$$2 \int_0^{\pi/4} e^x \sin x \, dx = [e^x \sin x]_0^{\pi/4} - [e^x \cos x]_0^{\pi/4} = \frac{e^{\pi/4}}{\sqrt{2}} - 0 - \frac{e^{\pi/4}}{\sqrt{2}} + 1 = 1$$

varav

$$\int_0^{\pi/4} e^x \sin x \, dx = \frac{1}{2}.$$

b) Vi partiellintegrerar och väljer att derivera arctan:

$$\begin{aligned} \int_0^1 x \arctan x \, dx &= \left[ \begin{array}{l} f' = x, \quad f = \frac{1}{2}x^2 \\ g = \arctan x, \quad g' = \frac{1}{1+x^2} \end{array} \right] = \left[ \frac{1}{2}x^2 \arctan x \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{2}x^2 \cdot \frac{1}{1+x^2} \, dx = \\ &= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2} \, dx = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{1+x^2-1}{1+x^2} \, dx = \\ &= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} \int_0^1 \left( 1 - \frac{1}{1+x^2} \right) \, dx = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} [x - \arctan x]_0^1 = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} + \frac{\pi}{8} = \\ &= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

4. Kurvans längd ges av

$$\begin{aligned} l &= \int_0^{\pi/3} \sqrt{[r(\varphi)]^2 + [r'(\varphi)]^2} \, d\varphi = \int_0^{\pi/3} \sqrt{e^{6\varphi} + 9e^{6\varphi}} \, d\varphi = \sqrt{10} \int_0^{\pi/3} e^{3\varphi} \, d\varphi = \\ &= \sqrt{10} \left[ \frac{e^{3\varphi}}{3} \right]_0^{\pi/3} = \frac{\sqrt{10}}{3} (e^\pi - 1). \end{aligned}$$

5. Den sökta arean ges av integralen

$$\begin{aligned} A &= 2\pi \int_0^1 y(x) \sqrt{1 + [y'(x)]^2} \, dx = 2\pi \int_0^1 2\sqrt{x} \sqrt{1 + \frac{1}{x}} \, dx = 4\pi \int_0^1 \sqrt{x} \sqrt{\frac{x+1}{x}} \, dx = \\ &= 4\pi \int_0^1 \sqrt{x+1} \, dx = 4\pi \left[ \frac{(x+1)^{3/2}}{3/2} \right]_0^1 = \frac{8\pi}{3} (2\sqrt{2} - 1). \end{aligned}$$

6. a) Vi använder oss av standard Maclaurinutveckling för  $\arctan x$ :

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x - x}{x^3} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \frac{x^3}{3} + O(x^5) - x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{x^3}{3} + O(x^5)}{x^3} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left( -\frac{1}{3} + O(x^2) \right) = -\frac{1}{3}.\end{aligned}$$

b)

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{x} \ln(1+x)} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{x}(x+O(x^2))} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{1+O(x)} = e,$$

som är förresten ett standardgränsvärde.

7. a) Se Sats 6.5 sid. 288.

b) Enligt medelvärdessatsen för integraler

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \int_{-x}^x f(t) dt = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \cdot f(\zeta) \cdot (x - (-x)) = 2 \lim_{x \rightarrow 0} f(\zeta)$$

för något  $\zeta$  mellan  $-x$  och  $x$ . Eftersom  $\zeta \rightarrow 0$  då  $x \rightarrow 0$  och eftersom  $f$  är kontinuerlig i 0 blir resultatet lika med  $2f(0)$ .