Krzysztof Marciniak, ITN
Linköpings universitet
tel. 011-36 33 20
e-post: krzma@itn.liu.se

Lösningar till tentamen TEN2 i Envariabelanalys (TNIU 70) för BI

2009–08–18 kl. 08.00-13.00

1. Differentialekvationen

$$y' - \frac{2}{x}y = \frac{3}{x^2}$$

löses med hjälp av integrerande faktor som i det här fallet är $h(x) = e^{-2\ln|x|} = |x|^{-2} = \frac{1}{x^2}$. Multiplicerar vi ekvationen ledvis med $h(x)$ får vi

$$\frac{1}{x^2}y' - \frac{2}{x^3}y = \frac{3}{x^4}.$$

VL blir som vanligt derivatan av produkten av den sökta funktionen y och h. Vi får alltså

$$\left(\frac{y}{x^2}\right)' = \frac{3}{x^4}$$

eller

$$\frac{y}{x^2} = 3\int \frac{dx}{x^4} = 3\int x^{-4}dx = 3\frac{x^{-3}}{-3} + C = -\frac{1}{x^3} + C.$$

Således, den allmänna lösningen blir

$$y(x) = -\frac{1}{x} + Cx^2,$$

vilket kan lätt kontrolleras. Gjorde du det på tentamen?

2. a) Se boken, sid. 391.

b) Differentialekvationen

$$x^2y' = \sin\left(\frac{1}{x}\right), \quad x > 0$$

är separabel och kan skrivas om som

$$dy = \frac{1}{x^2}\sin\left(\frac{1}{x}\right)dx.$$

Integrerar vi ledvis får vi

$$\int dy = \int \frac{1}{x^2}\sin\left(\frac{1}{x}\right)dx = \left[\text{variabelbyte: } t = \frac{1}{x}, \frac{dx}{x^2} = -dt\right] = -\int \sin t\,dt = \cos t + C = \cos\left(\frac{1}{x}\right) + C.$$

Således, den allmänna lösningen för ekvationen blir

$$y(x) = \cos\left(\frac{1}{x}\right) + C.$$

För att fånga upp den lösning som går genom $(\frac{1}{\pi}, 2)$ sätter vi in villkoret $y(\frac{1}{\pi}) = 2$ in i lösningen ovan. Vi får $2 = \cos\pi + C$ vilket ger $C = 3$. Således, den sökta lösningen är

$$y(x) = \cos\left(\frac{1}{x}\right) + 3.$$

3. a) se boken, sid. 358.

   b) Vi vet att $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + O(x^7)$ medan $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + O(x^4)$. Således

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x + \frac{1}{6}x^3}{x^3(\cos x - 1)} = \lim_{x\to 0}\frac{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + O(x^7) - x + \frac{1}{6}x^3}{x^3\left(1 - \frac{x^2}{2!} + O(x^4) - 1\right)} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^5}{120} + O(x^7)}{x^3\left(-\frac{x^2}{2!} + O(x^4)\right)}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{120} + O(x^2)}{-\frac{1}{2!} + O(x^2)} = -\frac{1}{60}.$$

4. Den karakteristiska ekvationen $r^2 + 9 = 0$ har två komplex konjugerade lösningar $r_1 = -3i$ samt $r_2 = 3i$. Således, den allmänna lösningen y_h till den homogena ekvationen blir $y_h = C_1\sin(3x) + C_2\cos(3x)$. En enkel ansatz $y_p = Ce^x$ löser hela ekvationen om $C = 1/10$ (kolla genom att sätta in ansatsen i ekvationen). Således, den allmänna lösningen till hela ekvationen är

$$y = C_1\sin(3x) + C_2\cos(3x) + \frac{1}{10}e^x.$$

   Den lösning vi söker skall även uppfylla de två villkoren $y(0) = 0$ samt $y'(0) = 1$. Detta ger $C_1 = 1/3$ samt $C_2 = -1/10$. Den sökta lösnigen är alltså

$$y_h = \frac{1}{3}\sin(3x) - \frac{1}{10}\cos(3x) + \frac{1}{10}e^x.$$

5. Naturligtvis, den givna kurvan är helt enkelt den övre halvan av cirekln med radien 1 och med mittpunkten i $(1,0)$, varför den sökta längden blir

$$l(\gamma) = \frac{1}{2}\cdot 2\pi\cdot r = \pi.$$

   Om man inte inser det måste man dock beräkna längden på det sedvanliga sättet, genom att använda den kända formeln:

$$l(\gamma) = \int_0^2 \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx.$$

   I vårt fall

$$f'(x) = \frac{2 - 2x}{2\sqrt{2x - x^2}} = \frac{1 - x}{\sqrt{2x - x^2}},$$

   så att

$$1 + \left[f'(x)\right]^2 = 1 + \frac{(1 - x)^2}{2x - x^2} = \frac{2x - x^2 + 1 - 2x + x^2}{2x - x^2} = \frac{1}{2x - x^2}.$$

   Det betyder att

$$l(\gamma) = \int_0^2 \frac{1}{\sqrt{2x - x^2}}\,dx = \int_0^2 \frac{1}{\sqrt{1 - (x - 1)^2}}\,dx = [\arcsin(x - 1)]_0^2 = \arcsin 1 - \arcsin(-1) = \frac{\pi}{2} - \frac{-\pi}{2} = \pi.$$

6. Roterar vi γ ett varv kring x-axeln uppstår det naturligtvis en sfär med radien $r = 1$ som har då ytan $4\pi r^2 = 4\pi$. Om du inte insåg det direkt så kunde du istället gå tillväga på följande sätt. Enligt en välkänd formel är den sökta arean lika med

$$A = 2\pi\int_0^2 f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx.$$

Enligt uträkningar i uppgift 4 får vi snabbt att $f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2} = 1$ så att

$$A = 2\pi \int_0^2 dx = 4\pi.$$

7. Vi börjar med integralen

$$\int_0^1 \frac{dx}{1-x^2}$$

som är generaliserad i 1. Det betyder att

$$\int_0^1 \frac{dx}{1-x^2} = \lim_{c \to 1_-} \int_0^c \frac{dx}{1-x^2}.$$

Vi letar först efter en primitiv funktion till $1/(1-x^2)$ och det genom att tillämpa den av oss väl behärskade 4-stegsmetoden. Steg 1 behövs ej. Steg 2: faktorisering av nämnaren ger $1-x^2 = (1+x)(1-x)$. Det betyder att

$$\frac{1}{1-x^2} = \frac{A}{1+x} + \frac{B}{1-x}.$$

Genom t.ex. handpåläggning hittar vi lätt att $A = B = \frac{1}{2}$ vilket ger

$$\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{1+x} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{1-x} = \frac{1}{2}(\ln|1+x| - \ln|1-x|) + D,$$

(där D är en godtycklig konstant) så att

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{dx}{1-x^2} &= \lim_{c \to 1_-} \int_0^c \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2}\lim_{c \to 1_-} [\ln|1+x| - \ln|1-x|]_0^c = \\ &= \frac{1}{2}\lim_{c \to 1_-} (\ln(1+c) - \ln(1-c)) = +\infty,\end{aligned}$$

ty om $c \to 1_-$ så går $1-c$ mot 0_+ och $\lim_{x \to 0_+} \ln x = -\infty$. Integralen divergerar alltså mot $+\infty$.

Vidare, integralen

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^2+4}.$$

är generaliserad i $+\infty$. Således,

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{dx}{x^2+4} &= \lim_{b \to \infty} \int_0^b \frac{dx}{x^2+2^2} = \lim_{b \to \infty} \left[\frac{1}{2}\arctan\frac{x}{2}\right]_0^b = \lim_{b \to \infty}\left(\frac{1}{2}\arctan\frac{b}{2} - \frac{1}{2}\arctan 0\right) \\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

Integralen konvergerar således till $\frac{\pi}{4}$.