Krzysztof Marciniak, ITN
Linköpings universitet
tfn 011-36 33 20
krzma@itn.liu.se

Lösningar till kontrollskrivningen KTR1 i Envariabelanalys II (TNIU 23)
för BI1

2010-02-03 kl. 10.00—12.00

1. a) Se boken, Sats 5.4 sid. 246.

   b) Den första integralen löser vi med hjälp av partiell integration, vi deriverar då $\ln x$:

$$\begin{aligned}\int x^2 \ln x\, dx &= \left[\begin{array}{c} f' = x^2,\ f = \frac{1}{3}x^3 \\ g = \ln x,\ g' = \frac{1}{x} \end{array}\right] = \frac{1}{3}x^3 \ln x - \frac{1}{3}\int x^2\, dx = \frac{1}{3}x^3 \ln x - \frac{1}{9}x^3 + C = \\ &= \frac{1}{3}x^3\left(\ln x - \frac{1}{3}\right) + C.\end{aligned}$$

   Kontrollera detta genom derivering.

   Den andra integralen löses också med hjälp av partiell integration men nu väljer vi att derivera x^2. Vi måste partiellintegrera två gånger:

$$\begin{aligned}\int x^2 \sin x\, dx &= \left[\begin{array}{c} f' = \sin x,\ f = -\cos x \\ g = x^2,\ g' = 2x \end{array}\right] = -x^2\cos x + 2\int x\cos x\, dx = \\ &= \left[\begin{array}{c} f' = \cos x,\ f = \sin x \\ g = x,\ g' = 1 \end{array}\right] = -x^2\cos x + 2\left(x\sin x - \int \sin x\, dx\right) = \\ &= -x^2\cos x + 2x\sin x + 2\cos x + C.\end{aligned}$$

   Kontrollera detta genom derivering.

2. a) Vi använder oss av variabelbytet $y = \cos x$:

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\, dx &= \left[\begin{array}{c} y = \cos x,\ \ \sin x dx = -dy \\ x = 0 \Rightarrow y = 1,\ x = \pi/2 \Rightarrow y = 0 \end{array}\right] = -\int_1^0 \frac{dy}{1+y^2} = \\ &= \int_0^1 \frac{dy}{1+y^2} = [\arctan y]_0^1 = \arctan(1) - \arctan(0) = \frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

   b) Integralen är generaliserad i $\sqrt{2}$. Vi får alltså

$$\begin{aligned}\int_0^{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2-x^2}}\, dx &= \lim_{b\to\sqrt{2}_-} \int_0^b \frac{1}{\sqrt{2-x^2}}\, dx = \lim_{b\to\sqrt{2}_-}\left[\arcsin\frac{x}{\sqrt{2}}\right]_0^b = \\ &= \lim_{b\to\sqrt{2}_-}\left(\arcsin\frac{b}{\sqrt{2}} - \arcsin 0\right) = \arcsin 1 - \arcsin 0 = \frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

3. Integranden är rationell så vi använder oss av vår 4-stegsmetod. Steg 1 (polynomdivision) behövs ej. Steg 2 (faktorisering av nämnare) ger att $x^3 - x^2 + x - 1 = (x-1)(x^2+1)$. Det betyder att integranden kan partiellbråksuppdelas (Steg 4) med hjälp av ansatsen

$$\frac{x-7}{x^3 - x^2 + x - 1} = \frac{x-7}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$$

där A kan lätt hittas via handpåläggning:

$$A = \left.\frac{x-7}{x^2+1}\right|_{x=1} = -3$$

och B och C kan fås genom andra metoder. Vi får $B = 3$ medan $C = 4$ så att

$$\frac{x-7}{x^3 - x^2 + x - 1} = \frac{-3}{x-1} + \frac{3x+4}{x^2+1}$$

(kontrollera!) vilket betyder att

$$\begin{aligned}\int \frac{x-7}{x^3 - x^2 + x - 1}\,dx &= \int \left(\frac{-3}{x-1} + \frac{3}{2}\frac{2x}{x^2+1} + \frac{4}{x^2+1} \right) dx = \\ &= -3\ln|x-1| + \frac{3}{2}\ln\left(x^2+1\right) + 4\arctan x + C,\end{aligned}$$

där den andra integralen fås ur formeln

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|f(x)| + C.$$

4. a) Se boken, Sats 6.7 sid. 290.

   b) Integranden har ingen elementär primitiv. Beteckna

$$F(x) = \int_a^x \frac{\ln t}{\sin t}\,dt$$

där a är en konstant. Enligt analysens huvudsats har vi då

$$F'(x) = \frac{\ln x}{\sin x}.$$

Vi använder nu detta tillsammans med insättningsformeln och kedjeregeln och får

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left(\int_{\arcsin x}^{e^x} \frac{\ln t}{\sin t}\,dt \right) &= \frac{d}{dx}\left(F(e^x) - F(\arcsin x)\right) = F'(e^x)e^x - \frac{F'(\arcsin x)}{\sqrt{1-x^2}} = \\ &= \frac{\ln e^x}{\sin(e^x)}e^x - \frac{\ln(\arcsin x)}{\sin(\arcsin x)\sqrt{1-x^2}} = \frac{xe^x}{\sin(e^x)} - \frac{\ln(\arcsin x)}{x\sqrt{1-x^2}}.\end{aligned}$$