Krzysztof Marciniak, ITN
Linköpings universitet
tel. 011-36 33 20
e-post: krzma@itn.liu.se

Lösningar till tentamen TEN1 i Envariabelanalys II (TNIU 23)

för BI

2010–03–12 kl. 08.00-13.00

1. a) Se boken, sid. 386-387.

   b) Differentialekvationen
$$y' + \frac{y}{x} = 3\sin x$$
(där $x \neq 0$) är linjär av 1:a ordningen varav metoden av integrerande faktor är lämplig. En integrerande faktor är då
$$h(x) = e^{F(x)}$$
där F är en primitiv till $\frac{1}{x}$, dvs $F(x) = \int \frac{dx}{x} = \ln|x|$. Således, $h(x) = e^{\ln|x|} = |x| = \pm x = x$ (vi väljer $+x$ både för $x > 0$ och för $x < 0$). I nästa steg multiplicerar vi ledvis ekvationen med h. Vi får
$$xy' + y = 3x\sin x$$
och vi ser att VL är en derivata av $y(x)h(x)$. Ekvationen har alltså formen
$$(xy)' = 3x\sin x$$
vilket ger
$$\begin{aligned} xy &= 3\int x\sin x\,dx \overset{\text{P.I.}}{=} \left[\begin{array}{l} f' = \sin x,\ f = -\cos x \\ g = x,\ g' = 1 \end{array}\right] = 3\left(-x\cos x + \int \cos x\,dx\right) = \\ &= -3x\cos x + 3\sin x + C. \end{aligned}$$
Således, den allmänna lösningen för vår DE är
$$y(x) = -3\cos x + 3\frac{\sin x}{x} + \frac{C}{x}.$$
Det att bra att kontrollera resultatet genom att sätta detta in i DE.

2. Differentialekvationen
$$y'' + 2y' + y = e^x + x^2$$
är linjär av 2:a ordningen och med konstanta koefficienter. Vi söker först y_h dvs. den allmänna lösningen för homogena delen. Den karakteristiska ekvationen är $r^2 + 2r + 1 = 0$ dvs. $(r+1)^2 = 0$ vilket ger att $r = -1$ är en dubbelrot. Detta ger att
$$y_h = (C_1 x + C_2)\,e^{-x}.$$
Dags att bestämma y_p. Vi använder superpositionsprincipen (sid. 399) och gör det i två steg: först bestämmer vi y_{p_1} för ekvationen med $HL = e^x$ och sedan hittar vi y_{p_2} för ekvationen med $HL = x^2$. Den tillräckliga ansatzen för y_{p_1} är $y_{p_1} = Ae^x$ vilket insatt i $y'' + 2y' + y = e^x$ ger $A = \frac{1}{4}$. Således,
$$y_{p_1} = \frac{1}{4}e^x.$$

Den tillräckliga ansatzen för y_{p_2} är (se boken sid. 406) $y_{p_2} = Bx^2 + Cx + D$ vilket insatt i $y'' + 2y' + y = x^2$ ger

$$y_{p_2} = x^2 - 4x + 6.$$

Vi får alltså den allmänna lösningen av hela ekvationen (se Sats 9.1 sid. 400)

$$y = y_h + y_p = y_h + y_{p_1} + y_{p_2} = (C_1 x + C_2)\, e^{-x} + \frac{1}{4} e^x + x^2 - 4x + 6.$$

Nu skall vi fånga upp den lösning som tangerar x-axeln vid $x = 0$ dvs som uppfyller bivillkor

$$y(0) = 0 \quad \text{samt} \quad y'(0) = 0$$

Villkoret $y(0) = 0$ ger sambandet $0 = C_2 + \frac{1}{4} + 6$ vilket ger $C_2 = -\frac{25}{4}$. Vidare, eftersom

$$y'(x) = C_1 e^{-x} - (C_1 x + C_2)\, e^{-x} + \frac{1}{4} e^x + 2x - 4$$

så ger villkoret $y'(0) = 0$ ekvationen $0 = C_1 - C_2 + \frac{1}{4} - 4$ i.e. $C_1 = C_2 + \frac{15}{4} = -\frac{10}{4} = -\frac{5}{2}$. Vi får alltså att den sökta lösningen är

$$y = -\frac{1}{4}(10x + 25)\, e^{-x} + \frac{1}{4} e^x + x^2 - 4x + 6.$$

Kontrollera gärna att denna lösning uppfyller både ekvationen och bivillkor.

3. Kurvan $y = \cos x$ sjunker under x-axeln vid $x = \frac{\pi}{2}$. Det betyder att den sökta volymen (via "pannkaksformeln" på sid. 327) ges av

$$y = \pi \int_0^{\pi/2} \cos^2 x \, dx = \pi \int_0^{\pi/2} \frac{1 + \cos 2x}{2} \, dx = \frac{\pi}{2} \left[x + \frac{\sin 2x}{2} \right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi^2}{4}.$$

4. Den sökta längden (se formeln på sid 325) ges av den generaliserade (!) integralen

$$\begin{aligned} l &= \int_0^\infty \sqrt{r^2(\varphi) + [r'(\varphi)]^2} d\varphi = \int_0^\infty \sqrt{e^{-2a\varphi} + a^2 e^{-2a\varphi}} d\varphi = \sqrt{a^2+1} \int_0^\infty e^{-a\varphi} d\varphi = \\ &= \sqrt{a^2+1} \lim_{b \to \infty} \int_0^b e^{-a\varphi} d\varphi = \sqrt{a^2+1} \lim_{b \to \infty} \left[\frac{e^{-a\varphi}}{-a} \right]_0^b = \sqrt{1 + \frac{1}{a^2}} \lim_{b \to \infty} \left(1 - e^{-ab}\right) = \sqrt{1 + \frac{1}{a^2}}. \end{aligned}$$

Integralen är alltså konvergent vilket betyder att kurvan har en ändlig längd.

5. a) Den sökta sannolikheten ges av

$$\begin{aligned} P\left(-5 < X < \frac{1}{2}\right) &= \int_{-5}^{1/2} f(x)\, dx = \frac{3}{2} \int_0^{1/2} \left(1 - x^2\right) dx = \frac{3}{2} \left[x - \frac{x^3}{3} \right]_0^{1/2} = \\ &= \frac{3}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{24} \right) = \frac{11}{16}. \end{aligned}$$

Notera det andra likhetstecknet som är sant tack vare faktum att $f(x) = 0$ mellan -5 och 0.

b) Väntevärdet $E(X)$ hittar vi direkt ur definitionen:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\, dx = \frac{3}{2} \int_0^1 x \left(1 - x^2\right) dx = \frac{3}{2} \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} \right]_0^1 = \frac{3}{8}.$$

Vidare, enligt formeln (11) ur Fö 8

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\, dx = \frac{3}{2}\int_0^1 x^2\left(1-x^2\right) = \frac{3}{2}\left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5}\right]_0^1 = \frac{3}{2}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) = \frac{1}{5}.$$

Detta ger (enligt formeln (12) (Sats 20) i Fö8) att

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{1}{5} - \frac{9}{64} = \frac{19}{320}$$

som är alltså ett mått på hur pass spridda mätresultat av X kommer att vara (vid långa serier av experiment).

6. I bägge fall använder vi elementära Maclaurinutvecklingar från Sats 8.3 på sid. 365. Vi börjar med a)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\sin(3x) - 3\sin x}{\arctan x - x} &= \lim_{x\to 0}\frac{3x - \frac{(3x)^3}{3!} + O(x^5) - 3\left(x - \frac{x^3}{3!} + O(x^5)\right)}{x - \frac{1}{3}x^3 + O(x^5) - x} = \\ &= \lim_{x\to 0}\frac{-4x^3 + O(x^5)}{-\frac{1}{3}x^3 + O(x^5)} = \lim_{x\to 0}\frac{-4 + O(x^2)}{-\frac{1}{3} + O(x^2)} = 12.\end{aligned}$$

Dags för b)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x) - \sin x}{e^x - 1 - x} &= \lim_{x\to 0}\frac{x - \frac{1}{2}x^2 + O(x^3) - \left(x + O(x^3)\right)}{1 + x + \frac{1}{2}x^2 + O(x^3) - 1 - x} = \\ &= \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}x^2 + O(x^3)}{\frac{1}{2}x^2 + O(x^3)} = \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2} + O(x)}{\frac{1}{2} + O(x)} = -1.\end{aligned}$$

7. a) Se Sats 6.7, sid. 290 i boken.

b) Enligt tipset skall vi derivera sambandet

$$y(x) = x + \int_1^x y(t)\, dt \tag{1}$$

ledvis. Detta ger (där analysens huvudsats används för att derivera högerledet; vi även skriver nu y istället av $y(x)$ för tydlighetens skull)

$$y' = 1 + y$$

vilket är en separabel differentialekvation som kan skrivas

$$\frac{dy}{1+y} = dx.$$

Integrerar vi detta ledvis får vi den allmänna lösningen i implicit form:

$$\ln|1+y| = x + C$$

som kan lösas explicit:

$$y = -1 + De^x$$

där $D = \pm e^C$ och är alltså en godtycklig konstant $\neq 0$. Notera dock att även $y = -1$ (vilket motsvarar $D = 0$) är en lösning till vår differentialekvation. Notera vidare att sambandet (1) ovan ger ett bivillkor, nämligen

$$y(1) = 1 + \int_1^1 y(t)\,dt = 1$$

dvs. $y(1) = 1$. Sätter vi in detta i lösningen ovan får vi $1 = -1 + De$ varav $D = 2e^{-1}$. Således, den sökta lösningen är

$$y = -1 + 2e^{x-1}.$$

Kontrollera gärna att denna lösning verkligen uppfyller både sambandet (1) och begynnelsevillkoret $y(1) = 1$.