Krzysztof Marciniak, ITN
Linköpings universitet
tfn 011-36 33 20
e-post: krzma@itn.liu.se

Lösningar till tentamen TEN1 i Envariabelanalys II (TNIU 23)

för BI

2010–06–09 kl. 08.00-13.00

1. a) Se boken, sid. 391.

   b) Ekvationen
$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{1-y^2}$$
(notera att $y \in [0,1]$) är separabel och efter variabelseparation antar formen
$$\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = dx.$$
Ledvis integration ger den allmänna lösningen i implicit form:
$$\arcsin y = x + C.$$
Vidare, villkoret $y(0) = \frac{1}{2}$ ger $\arcsin \frac{1}{2} = 0 + C$ eller $\frac{\pi}{6} = C$. Således, den sökta lösningen har (explicit) form
$$y = \sin(x + \pi/6) = \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x + \frac{1}{2} \cos x.$$

2. Den karakteristiska ekvationen $r^2 - 4r + 4 = 0$ har en dubbelrot $r_{1,2} = 2$ varför den allmänna lösningen av den homogena delen av ekvationen är
$$y_h = (C_1 x + C_2)\, e^{2x}.$$
Den lämpliga ansatzen för en partikulär lösning y_p är $y_p = Ae^x$ och enkel huvuduträkning visar att $A = 1$ så att $y_p = e^x$. Således, den allmänna lösningen av hela ekvationen är
$$y = y_h + y_p = (C_1 x + C_2)\, e^{2x} + e^x.$$
Det återstår att hitta de värden på konstanterna C_1 och C_2 för vilka lösningen går genom de givna punkterna. Villkoret $y(0) = 2$ ger sambandet $C_2 + 1 = 2$ (varför $C_2 = 1$) och villkoret $y(1) = e$ ger då $(C_1 + 1)e^2 + e = e$ eller $C_1 = -1$. Således, den sökta lösningen är
$$y(x) = (1 - x)e^{2x} + e^x.$$

3. Den sökta volymen ges av integralen
$$V = \pi \int_1^2 [f(x)]^2 \, dx = \pi \int_1^2 \frac{x}{x^2 + 2x - 3} \, dx$$
som är generaliserad i $x = 1$ ty $x^2 + 2x - 3 = (x - 1)(x + 3)$. Vi tar först fram en primitiv till f^2 dvs. vi beräknar integralen
$$I = \int \frac{x}{x^2 + 2x - 3} \, dx$$

och för detta använder vi vår 4-stegmetod. Steg 1 - polynomdivision - behövs ej. Steg 2 - faktorisering av nämnaren, är redan utförd ovan: $x^2 + 2x - 3 = (x-1)(x+3)$. Det betyder att vi skall partialbråksuppdela integranden i I (Steg 3) enligt ansatsen:

$$\frac{x}{x^2+2x-3} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+3}$$

och genom handpåläggning eller på annat sätt hittar vi att $A = \frac{1}{4}$ medan $B = \frac{3}{4}$. Det betyder att (Steg 4):

$$I = \int \frac{x}{x^2+2x-3}\,dx = \frac{1}{4}\int \frac{1}{x-1}\,dx + \frac{3}{4}\int \frac{1}{x+3}\,dx.$$

Den sökta volymen blir då

$$V = \pi\int_1^2 \frac{x}{x^2+2x-3}\,dx = \frac{\pi}{4}\int_1^2 \frac{1}{x-1}\,dx + \frac{3}{4}\pi\int_1^2 \frac{1}{x+3}\,dx$$

och eftersom den första integralen divergerar enligt följande:

$$\int_1^2 \frac{1}{x-1}\,dx = \lim_{a\to 1_+}\int_a^2 \frac{1}{x-1}\,dx = \lim_{a\to 1_+}\left[\ln|x-1|\right]_a^2 = \lim_{a\to 1_+}\left(\ln 1 - \ln|a-1|\right) = -\lim_{a\to 1_+}\ln|a-1| = +\infty$$

så blir hela volymen oändlig, $V = \infty$.

4. Kurvans längd ges av integralen (se boken, sid. 325)

$$l = \int_0^\pi \sqrt{\sin^2\varphi + [\cos\varphi]^2}\,d\varphi = \int_0^\pi d\varphi = \pi$$

(integranden blir lika med 1 pga trigettan) vilket är självklar för de som ser att kurvan är en cirkel med radien 1/2 och med mittpunkt i $(0, 1/2)$.

5. Funktionen

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-x^2-\cos^2 x}{x^4} & \text{för } x \neq 0 \\ a \quad \text{för } x = 0 \end{cases}$$

blir kontinuerlig i 0 förutsatt att $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$ dvs under förutsättningen att

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-x^2-\cos^2 x}{x^4} = a.$$

Gränsvärdet på vänsterledet skall vi uträkna med hjälp av Taylorutveckling för cos:

$$\begin{aligned} \cos^2 x &= \cos x\cdot\cos x = \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + O(x^6)\right)\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + O(x^6)\right) = \\ &= 1 - x^2 + \frac{1}{3}x^4 + O(x^6). \end{aligned}$$

Det betyder att

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0}\frac{1-x^2-\cos^2(x)}{x^4} &= \lim_{x\to 0}\frac{1-x^2-\left(1-x^2+\frac{1}{3}x^4+O(x^6)\right)}{x^4} = \\ &= \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{3}x^4+O(x^6)}{x^4} = \lim_{x\to 0}\left(-\frac{1}{3}+O(x^2)\right) = -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

så att f är kontinuerlig i 0 då och endast då $a = -\frac{1}{3}$.

6. a) Enligt definition av $E(X)$:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\, dx = \lambda \int_{0}^{\infty} x e^{-\lambda x}\, dx = \lambda \lim_{b\to\infty} \int_{0}^{b} x e^{-\lambda x}\, dx.$$

Vidare, partiell integration visar att

$$\int x e^{-\lambda x}\, dx = -\frac{1}{\lambda^2}\,(1+\lambda x)\, e^{-\lambda x}$$

så att

$$E(X) = -\frac{1}{\lambda} \lim_{b\to\infty} \Big[(1+\lambda x)\, e^{-\lambda x}\Big]_0^b = -\frac{1}{\lambda} \lim_{b\to\infty} \Big((1+\lambda b)\, e^{-\lambda b} - 1\Big) = \frac{1}{\lambda}.$$

b) Kvantilen x_α är den enda lösningen till ekvationen $F(x) = \alpha$ där

$$F(x) = P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt$$

är X:s fördelningsfunktion. Vi beräknar alltså F först. Notera att $f(x) = 0$ på $]-\infty, 0]$ vilket betyder att $F(x) = 0$ där också. Vidare, för $x \ge 0$

$$F(x) = \int_0^x \lambda e^{-\lambda t} dt = \lambda \left[-\frac{e^{-\lambda t}}{\lambda}\right]_0^x = -\left(e^{-\lambda x} - 1\right) = 1 - e^{-\lambda x}.$$

Således

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} \text{ för } x \ge 0 \\ 0 \text{ för } x < 0. \end{cases}$$

Vi skall nu lösa ekvationen $F(x) = \alpha$ eller, enligt uträkning ovan, $1 - e^{-\lambda x} = \alpha$. Detta ger $e^{-\lambda x} = 1 - \alpha$ eller $x = -\frac{1}{\lambda} \ln(1-\alpha)$. Således

$$x_\alpha = -\frac{1}{\lambda} \ln(1-\alpha).$$

Speciellt, medianen $x_{1/2}$ är lika med

$$x_{1/2} = -\frac{1}{\lambda} \ln(1/2) = \frac{\ln 2}{\lambda}$$

(jämför gärna resultatet med lösningen av Problem 4 på Fö 8 /se kursens hemsida/). Notera också att $x_a > 0$ trots minus i formeln för att $\ln(1-\alpha) < 0$ för $\alpha \in\,]0, 1[$. Notera även att $E(X) > x_{1/2}$. Kan du förklara detta?

7. a) Se Sats 6.5, sid. 288.

b) Integralen är inte elementär och kan ej uttryckas med hjälp av de funktioner vi känner till. Däremot - enligt satsen i a) - måste det på intervallet $\left[0, \sqrt{\pi/4}\right]$ finnas (minst) ett tal ξ sådant att

$$\int_0^{\sqrt{\pi/4}} \sin(t^2) dt = \sin(\xi^2) \sqrt{\pi/4}$$

Vidare, eftersom $\xi \in \left[0, \sqrt{\pi/4}\right]$, ligger ξ^2 i intervallet $[0, \pi/4]$ och största värdet av sin där är $\sin(\pi/4) = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Det betyder att

$$\int_0^{\sqrt{\pi/4}} \sin(t^2)dt \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{\frac{\pi}{4}} = \sqrt{\frac{\pi}{8}}$$

v.s.v.