Krzysztof Marciniak, ITN
Linköpings universitet
tfn 011-36 33 20
e-post: krzma@itn.liu.se

Lösningar till tentamen TEN1 i Envariabelanalys II (TNIU 23)
för BI
2010–08–21 kl. 08.00-13.00

1. Differentialekvationen

$$xy' - y = x^2 e^x$$

kan lösas med hjälp av integrerande faktor men först måste vi dela den med x (!) så att koefficienten vid y' är 1. Vi får

$$y' - \frac{1}{x}y = xe^x \tag{1}$$

så att integrerande faktorn IF blir

$$h(x) = e^{-\int \frac{1}{x}dx} = e^{-\ln|x|} = \frac{1}{|x|} = \pm\frac{1}{x}$$

och eftersom IF är definierad upp till en nollskild konstant kan vi välja t.ex. $h(x) = +\frac{1}{x}$. Multiplicerar vi ekvationen (1) ledvis med $h(x)$ får vi

$$\frac{y'}{x} - \frac{1}{x^2}y = e^x.$$

VL är som vanligt derivatan av produkten av $y(x)$ och $h(x)$ så att ekvationen ovan kan skrivas som

$$\left(\frac{y}{x}\right)' = e^x$$

så att

$$\frac{y}{x} = \int e^x\,dx = e^x + C$$

vilket ger att den allmänna lösningen av ekvationen är

$$y(x) = x\left(e^x + C\right)$$

(notera singulariteten i $x = 0$). Vidare, villkoret $y(1) = e$ ger $C = 0$ så att den sökta lösningen är $y(x) = xe^x$.

2. Den karakteristiska ekvationen r^2+3r+2 har rötterna -1 och -2. Således, den allmänna lösningen för *den homogena* delen av differentialekvationen blir

$$y_h = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-x}.$$

En bra ansats för en partikulär lösning av hela ekvationen är

$$y_p = Ae^x + B\sin x + C\cos x.$$

Sätter vi in detta i ekvationen finner vi att $A = 1/6$, $B = 3/10$ samt $C = 1/10$. Således, den allmänna lösningen till *hela* ekvationen är

$$y = y_h + y_p = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-x} + \frac{1}{6}e^x + \frac{3}{10}\sin x + \frac{1}{10}\cos x.$$

3. a) Eftersom $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + O(x^4)$ och $\ln(1+x) = x + O(x^2)$ (obs, det räcker!) får vi

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{\ln(1+x^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^2}{2} + O(x^4)}{x^2 + O(x^4)} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{2} + O(x^2)}{1 + O(x^2)} = \frac{1}{2}.$$

b) För att tillämpa Maclaurin måste vi först göra variabelbytet $t = 1/x$. Vi får

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\left(x\cos\frac{1}{x} - x\right) &= \lim_{x\to\infty} \frac{\cos\frac{1}{x} - 1}{\frac{1}{x}} = \lim_{t\to 0_+} \frac{\cos t - 1}{t} = \\ &= \lim_{t\to 0_+} \frac{1 - \frac{1}{2}t^2 + O(t^4) - 1}{t} = \lim_{t\to 0_+}\left(-\frac{1}{2}t + O(t^3)\right) = 0.\end{aligned}$$

4. Integralen

$$\int \frac{2x+1}{x^3+3x^2+2x}\, dx$$

löser vi med hjälp av vår 4-stegsmetod. Steg 1 (=polynomdivision) behövs ej ty polynomet i nämnaren har högre gradtal än polynomet i täljaren. Steg 2 - faktorisering av nämnaren - ger

$$x^3 + 3x^2 + 2x = x\left(x^2 + 3x + 2\right) = x(x+1)(x+2)$$

så nämnaren innehåller tre enkla rötter. Det betyder att integranden kan skrivas om som (Steg 3)

$$\frac{2x+1}{x^3+3x^2+2x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x+2}$$

och handpåläggningen (eller andra metoder) ger $A = \frac{1}{2}$, $B = 1$, $C = -\frac{3}{2}$. Det betyder att

$$\frac{2x+1}{x^3+3x^2+2x} = \frac{1/2}{x} + \frac{1}{x+1} - \frac{3/2}{x+2}$$

och därför (Steg 4):

$$\int \frac{2x+1}{x^3+3x^2+2x}\, dx = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x} + \int \frac{dx}{x+1} - \frac{3}{2}\int \frac{dx}{x+2} = \frac{1}{2}\ln|x| + \ln|x+1| - \frac{3}{2}\ln|x+2| + C.$$

5. Enligt rörformeln (sid. 328) blir den sökta volymen

$$V = 2\pi \int_0^1 x \cdot x^3\, dx = 2\pi \int_0^1 x^4\, dx = \frac{2}{5}\pi \left[x^5\right]_0^1 = \frac{2}{5}\pi$$

6. a) Enligt Definition 1 Fö 8 (se kursens hemsida) en Riemannintegrerbar funktion f är en täthetsfunktion om dels $f \geq 0$ och dels $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 1$. Funktionen ifråga

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{x-1} & \text{för } x < 1 \\ \frac{1}{2}e^{1-x} & \text{för } x \geq 1 \end{cases}$$

uppfyller självklart det första villkoret. Vidare

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{1} f(x)\, dx &= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{1} e^{x-1}dx = \frac{1}{2}\lim_{a\to-\infty}\int_a^1 e^{x-1}dx = \frac{1}{2}\lim_{a\to-\infty}\left[e^{x-1}\right]_a^1 = \\ &= \frac{1}{2}\lim_{a\to-\infty}\left(1 - e^{a-1}\right) = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

På liknande sätt kan man visa att

$$\int_{1}^{\infty} f(x)\,dx = \frac{1}{2}$$

så att

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{1} f(x)\,dx + \int_{1}^{\infty} f(x)\,dx = 1$$

vilket skulle visas.

b) Medianen $x_{0,50}$ är det värde på x för vilket

$$\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \frac{1}{2}$$

Enligt beräkningar i a) är alltså medianen $x_{0,50}$ lika med 1.

Notera även att b) kan man se med sina inre krafter om man bara gör en enkel variabelbyte (förskjutning) $t = x - 1$ (för att se detta, rita $f(t)$).

7. a) Se boken, Sats 6.7, sid. 290.

   b) Se boken, sid. 293.