

Krzysztof Marciniak, ITN
Linköpings universitet
tel. 011-36 33 20
e-post: krzma@itn.liu.se

Lösningar till tentamen TEN2 i Envariabelanalys (TNIU 70)

för BI

2010-03-12 kl. 08.00-13.00

1. a) Se boken, sid. 386-387.

b) Differentialekvationen

$$y' + \frac{y}{x} = 3 \sin x$$

(där $x \neq 0$) är linjär av 1:a ordningen varav metoden av integrerande faktor är lämplig. En integrerande faktor är då

$$h(x) = e^{F(x)}$$

där F är en primitiv till $\frac{1}{x}$, dvs $F(x) = \int \frac{dx}{x} = \ln|x|$. Således, $h(x) = e^{\ln|x|} = |x| = \pm x = x$ (vi väljer $+x$ både för $x > 0$ och för $x < 0$). I nästa steg multiplicerar vi ledvis ekvationen med h . Vi får

$$xy' + y = 3x \sin x$$

och vi ser att VL är en derivata av $y(x)h(x)$. Ekvationen har alltså formen

$$(xy)' = 3x \sin x$$

vilket ger

$$\begin{aligned} xy &= 3 \int x \sin x \, dx \stackrel{\text{P.I.}}{=} \left[\begin{array}{l} f' = \sin x, \quad f = -\cos x \\ g = x, \quad g' = 1 \end{array} \right] = 3 \left(-x \cos x + \int \cos x \, dx \right) = \\ &= -3x \cos x + 3 \sin x + C. \end{aligned}$$

Således, den allmänna lösningen för vår DE är

$$y(x) = -3 \cos x + 3 \frac{\sin x}{x} + \frac{C}{x}.$$

Det är bra att kontrollera resultatet genom att sätta detta in i DE.

2. Differentialekvationen

$$y'' + 2y' + y = e^x + x^2$$

är linjär av 2:a ordningen och med konstanta koefficienter. Vi söker först y_h dvs. den allmänna lösningen för homogena delen. Den karakteristiska ekvationen är $r^2 + 2r + 1 = 0$ dvs. $(r+1)^2 = 0$ vilket ger att $r = -1$ är en dubbelrot. Detta ger att

$$y_h = (C_1 x + C_2) e^{-x}.$$

Då ska vi bestämma y_p . Vi använder superpositionsprincipen (sid. 399) och gör det i två steg: först bestämmer vi y_{p1} för ekvationen med $HL = e^x$ och sedan hittar vi y_{p2} för ekvationen med $HL = x^2$. Den tillräckliga ansatsen för y_{p1} är $y_{p1} = Ae^x$ vilket insatt i $y'' + 2y' + y = e^x$ ger $A = \frac{1}{4}$. Således,

$$y_{p1} = \frac{1}{4} e^x.$$

Den tillräckliga ansatsen för y_{p2} är (se boken sid. 406) $y_{p2} = Bx^2 + Cx + D$ vilket insatt i $y'' + 2y' + y = x^2$ ger

$$y_{p2} = x^2 - 4x + 6.$$

Vi får alltså den allmänna lösningen av hela ekvationen (se Sats 9.1 sid. 400)

$$y = y_h + y_p = y_h + y_{p1} + y_{p2} = (C_1x + C_2)e^{-x} + \frac{1}{4}e^x + x^2 - 4x + 6.$$

Nu skall vi fånga upp den lösning som tangerar x -axeln vid $x = 0$ dvs som uppfyller bivillkor

$$y(0) = 0 \quad \text{samnt} \quad y'(0) = 0$$

Villkoret $y(0) = 0$ ger sambandet $0 = C_2 + \frac{1}{4} + 6$ vilket ger $C_2 = -\frac{25}{4}$. Vidare, eftersom

$$y'(x) = C_1e^{-x} - (C_1x + C_2)e^{-x} + \frac{1}{4}e^x + 2x - 4$$

så ger villkoret $y'(0) = 0$ ekvationen $0 = C_1 - C_2 + \frac{1}{4} - 4$ i.e. $C_1 = C_2 + \frac{15}{4} = -\frac{10}{4} = -\frac{5}{2}$. Vi får alltså att den sökta lösningen är

$$y = -\frac{1}{4}(10x + 25)e^{-x} + \frac{1}{4}e^x + x^2 - 4x + 6.$$

Kontrollera gärna att denna lösning uppfyller både ekvationen och bivillkor.

3. Kurvan $y = \cos x$ sjunker under x -axeln vid $x = \frac{\pi}{2}$. Det betyder att den sökta volymen (via "pannkaksformeln" på sid. 327) ges av

$$y = \pi \int_0^{\pi/2} \cos^2 x \, dx = \pi \int_0^{\pi/2} \frac{1 + \cos 2x}{2} \, dx = \frac{\pi}{2} \left[x + \frac{\sin 2x}{2} \right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi^2}{4}.$$

4. Den sökta längden (se formeln på sid 325) ges av den generaliserade (!) integralen

$$\begin{aligned} l &= \int_0^{\infty} \sqrt{r^2(\varphi) + [r'(\varphi)]^2} \, d\varphi = \int_0^{\infty} \sqrt{e^{-2a\varphi} + a^2 e^{-2a\varphi}} \, d\varphi = \sqrt{a^2 + 1} \int_0^{\infty} e^{-a\varphi} \, d\varphi = \\ &= \sqrt{a^2 + 1} \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-a\varphi} \, d\varphi = \sqrt{a^2 + 1} \lim_{b \rightarrow \infty} \left[\frac{e^{-a\varphi}}{-a} \right]_0^b = \sqrt{1 + \frac{1}{a^2}} \lim_{b \rightarrow \infty} (1 - e^{-ab}) = \sqrt{1 + \frac{1}{a^2}}. \end{aligned}$$

Integralen är alltså konvergent vilket betyder att kurvan har en ändlig längd.

5. a) Se Sats 5.4 med tillhörande bevis, sid. 246-247 i boken.

b) Integralen kan beräknas vi med hjälp av partiell integration, vi skall då derivera $\arctan x$ och integrera x^2 :

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^2 \arctan x \, dx &= \left[\begin{array}{l} f' = x^2, \quad f = \frac{1}{3}x^3 \\ g = \arctan x, \quad g' = \frac{1}{1+x^2} \end{array} \right] = \left[\frac{1}{3}x^3 \arctan x \right]_0^1 - \frac{1}{3} \int_0^1 \frac{x^3}{1+x^2} \, dx \stackrel{\text{polynomdivision}}{=} \\ &= \left[\frac{1}{3}x^3 \arctan x \right]_0^1 - \frac{1}{3} \int_0^1 \left(x - \frac{x}{1+x^2} \right) \, dx = \\ &= \left[\frac{1}{3}x^3 \arctan x \right]_0^1 - \frac{1}{3} \left[\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) \right]_0^1 = \frac{\pi}{12} - \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \ln 2. \end{aligned}$$

6. I bägge fall använder vi elementära Maclaurinutvecklingar från Sats 8.3 på sid. 365. Vi börjar med a)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x) - 3 \sin x}{\arctan x - x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x - \frac{(3x)^3}{3!} + O(x^5) - 3 \left(x - \frac{x^3}{3!} + O(x^5) \right)}{x - \frac{1}{3}x^3 + O(x^5) - x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-4x^3 + O(x^5)}{-\frac{1}{3}x^3 + O(x^5)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-4 + O(x^2)}{-\frac{1}{3} + O(x^2)} = 12. \end{aligned}$$

Dags för b)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - \sin x}{e^x - 1 - x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \frac{1}{2}x^2 + O(x^3) - (x + O(x^3))}{1 + x + \frac{1}{2}x^2 + O(x^3) - 1 - x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{2}x^2 + O(x^3)}{\frac{1}{2}x^2 + O(x^3)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{2} + O(x)}{\frac{1}{2} + O(x)} = -1. \end{aligned}$$

7. a) Se Sats 6.7, sid. 290 i boken.

b) Enligt tipset skall vi derivera sambandet

$$y(x) = x + \int_1^x y(t) dt \tag{1}$$

ledvis. Detta ger (där analysens huvudsats används för att derivera högerledet; vi även skriver nu y istället av $y(x)$ för tydlighetens skull)

$$y' = 1 + y$$

vilket är en separabel differentialekvation som kan skrivas

$$\frac{dy}{1+y} = dx.$$

Integrerar vi detta ledvis får vi den allmänna lösningen i implicit form:

$$\ln |1+y| = x + C$$

som kan lösas explicit:

$$y = -1 + De^x$$

där $D = \pm e^C$ och är alltså en godtycklig konstant $\neq 0$. Notera dock att även $y = -1$ (vilket motsvarar $D = 0$) är en lösning till vår differentialekvation. Notera vidare att sambandet (1) ovan ger ett bivillkor, nämligen

$$y(1) = 1 + \int_1^1 y(t) dt = 1$$

dvs. $y(1) = 1$. Sätter vi in detta i lösningen ovan får vi $1 = -1 + De$ varav $D = 2e^{-1}$. Således, den sökta lösningen är

$$y = -1 + 2e^{x-1}.$$

Kontrollera gärna att denna lösning verkligen uppfyller både sambandet (1) och begynnelsevillkoret $y(1) = 1$.