Krzysztof Marciniak, ITN
Linköpings universitet
tfn 011-36 33 20
krzma@itn.liu.se

Lösningar till kontrollskrivningen KTR1 i Envariabelanalys II (TNIU 23)
för BI1

2011-02-02 kl. 08.00—10.00

1. a) Integralen kan beräknas med hjälp av en trigonometrisk omskrivning och ett variabelbyte:

$$\begin{aligned}\int \cos^3 x\,dx &= \int \cos^2 x \cdot \cos x\,dx = \int (1-\sin^2 x)\cos x\,dx = \\ &= \left[\begin{array}{c} y=\sin x \\ \cos x\,dx = dy\end{array}\right] = \int (1-y^2)dy = y - \frac{1}{3}y^3 + C = \\ &= \sin x - \frac{1}{3}\sin^3 x + C.\end{aligned}$$

Alternativt kan vi använda oss av Eulersformlerna. Vi har då

$$\cos^3 x = \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}(e^{3ix}+3e^{ix}+3e^{-ix}+e^{-3ix})$$

så att

$$\begin{aligned}\int \cos^3 x\,dx &= \frac{1}{8}\int (e^{3ix}+3e^{ix}+3e^{-ix}+e^{-3ix})dx = \frac{1}{8}\left(\frac{e^{3ix}}{3i}+3\frac{e^{ix}}{i}+3\frac{e^{-ix}}{-i}+\frac{e^{-3ix}}{-3i}\right)+C = \\ &\frac{1}{12}\sin 3x + \frac{3}{4}\sin x + C.\end{aligned}$$

Otroligt nog är det samma funktion i bägge svar (med samma C). Kan du se detta dvs kan du överföra det ena svaret i det andra?

b) Vi utför ett variabelbyte och sedan partiellintegrerar:

$$\begin{aligned}\int x^3 e^{x^2}dx &= \int x^2 e^{x^2} x\,dx = \left[\begin{array}{c} y = x^2 \\ \frac{dy}{dx} = 2x \Rightarrow xdx = \frac{1}{2}dy\end{array}\right] = \frac{1}{2}\int ye^y dy \overset{\text{P.I.}}{=} \left[\begin{array}{c} f=y, f'=1 \\ g'=e^y, g=e^y\end{array}\right] = \\ &= \frac{1}{2}\left(ye^y - \int e^y dy\right) = \frac{1}{2}(ye^y - e^y) + C = \frac{1}{2}\left(x^2e^{x^2}-e^{x^2}\right)+C = \frac{1}{2}e^{x^2}\left(x^2-1\right)+C.\end{aligned}$$

2. Den sökta arean är lika med integralen

$$\int_2^3 \frac{x+3}{x^2+5x-6}\,dx$$

som är alltså en bestämd integral av en rationell funktion. Vi hittar då först en primitivfunktion till integranden (via vår 4-stegsmetod) och sedan använder insättningsformeln. Steg 1 behövs ej. Steg 2 (faktorisering av nämnaren) ger att $x^2 + 5x - 6 = (x-1)(x+6)$ så att (Steg 3) vi gör en partialbråksuppdelning enligt ansatsen

$$\frac{x+3}{(x-1)(x+6)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+6}.$$

Handpåläggning ger

$$A = \left.\frac{x+3}{x+6}\right|_{x=1} = \frac{4}{7}, \quad B = \left.\frac{x+3}{x-1}\right|_{x=-6} = \frac{3}{7}$$

(kontrollera gärna!) så att

$$\int \frac{x+3}{x^2+5x-6}\,dx = \frac{4}{7}\int \frac{dx}{x-1} + \frac{3}{7}\int \frac{dx}{x+6} = \frac{4}{7}\ln|x-1| + \frac{3}{7}\ln|x+6| + C$$

så att den sökta arean till sist blir (enligt insättningsformeln)

$$\begin{aligned} A &= \int_2^3 \frac{x+3}{x^2+5x-6}\,dx = \left[\frac{4}{7}\ln|x-1| + \frac{3}{7}\ln|x+6|\right]_2^3 = \frac{4}{7}\ln 2 + \frac{3}{7}\ln 9 - \frac{3}{7}\ln 8 = \\ &= -\frac{5}{7}\ln 2 + \frac{6}{7}\ln 3 \approx 0.446\,56. \end{aligned}$$

3. Integralen är generaliserad i $x = 1$ så att

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}} &= \lim_{c\to 1_-} \int_0^c \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = \lim_{c\to 1_-} \left[-2\sqrt{1-x}\right]_0^c = \\ &= \lim_{c\to -1_-} \left(-2\sqrt{1-c} + 2\right) = 2. \end{aligned}$$

4. a) Se boken, Sats 6.7 sid. 290.

b) Om vi sätter

$$S(x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t^3}$$

så får vi, enligt kedjeregeln och analysens huvudsats:

$$\frac{d}{dx}\left(\int_0^{x^2} \frac{dt}{1+t^3}\right) = \frac{d}{dx}\left[S(x^2)\right] \overset{\text{kedjeregeln}}{=} S'(x^2)\cdot 2x \overset{\text{analysens huvudsats}}{=} \frac{1}{1+x^6}\cdot 2x = \frac{2x}{1+x^6}$$