Krzysztof Marciniak, ITN
Linköpings universitet
tfn 011-36 33 20
e-post: krzma@itn.liu.se

Lösningar till tentamen TEN1 i Envariabelanalys II (TNIU 23)

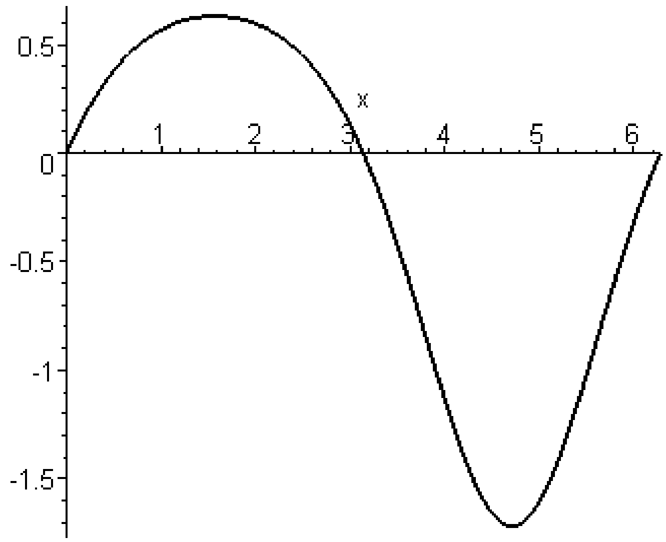
för BI

2011–03–15 kl. 08.00-13.00

1. Differentialekvationen
$$y' + y\cos x = \cos x$$
är både separabel (dela den ledvis med $\cos x$ för att se detta) och linjär av 1:a ordningen, så den kan lösas både med variabelseparation och med integrerande faktor. Här presenteras bara den andra metoden. En integrerande faktor är
$$h(x) = e^{\int \cos x\, dx} = e^{\sin x}$$
och efter ledvis multiplikation med h förvandlas ekvationen till
$$e^{\sin x} y' + y e^{\sin x}\cos x = e^{\sin x}\cos x$$
där VL är förstås derivatan av produkten $h \cdot y$:
$$\left(e^{\sin x} y\right)' = e^{\sin x}\cos x$$
så att
$$y e^{\sin x} = \int e^{\sin x}\cos x\, dx = \left[\begin{array}{c} t = \sin x \\ \cos x\, dx = dt \end{array}\right] = \int e^t\, dt = e^{\sin x} + C$$
vilket ger den allmänna lösningen av ekvationen:
$$y(x) = 1 + Ce^{-\sin x}$$
Vi letar nu efter den lösning som uppfyller kravet $y(\pi) = 0$ vilket ger $0 = 1 + Ce^{-\sin 0}$ i.e. $C = -1$. Den sökta lösningen har således formen
$$y(x) = 1 - e^{-\sin x}$$
Lösningen är ritad på Fugure 1. Som ni ser, lösningen uppfyller begynnelsevillkoret $y(\pi) = 0$.

2. Vi börjar med den homogena delen av ekvationen. Den karakteristiska ekvationen $r^2 - 2r + 2 = 0$ har två komplexa rötter $r_{1,2} = 1 \pm i$ vilket ger
$$y_h = e^x(C_1\cos x + C_2\sin x).$$
Vidare, vi behöver en partikulär lösning y_p av hela ekvationen. Ansatzen $y_p = Ax + B$ ger att $y_p = \frac{1}{2}x + 1$. Således, den allmänna lösningen (här: lösningsmängden) för hela ekvationen är
$$y = y_h + y_p = e^x(C_1\cos x + C_2\sin x) + \frac{1}{2}x + 1.$$
Vi letar nu efter den lösning ur lösningsmängden ovan som tangerar linjen $y = x + 1$ i $x = 0$. Det betyder att den sökta ekvationen måste uppfylla två bivillkor: $y(0) = 1$ samt $y'(0) = 1$. Sätter vi in dessa villkor i lösningen ovan får vi $C_1 = 0$, $C_2 = \frac{1}{2}$. Den sökta lösningen är då
$$y = \frac{1}{2}e^x\sin x + \frac{1}{2}x + 1$$
och kan åskådas på Figure 2.

1



$_1.pdf$

Figure 1: Grafen av $y(x) = 1 - e^{-\sin x}$

3. Den sökta volymen ges av en känd formel (rörformeln):

$$V = 2\pi \int_2^3 xy(x)\, dx = 2\pi \int_2^3 \frac{x}{x^2 + 2x - 3}\, dx.$$

Vi hittar först en primitiv till integranden. Integranden är en rationell funktion och vi använder alltså vår fyrastegsalgoritm. Steg 1 (polynomdivision) behövs ej. Steg 2 (faktorisering av nämnaren) ger $x^2 + 2x - 3 = (x - 1)(x + 3)$ så att (Steg 3 = PBU)

$$\frac{x}{x^2 + 2x - 3} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x + 3} = \frac{1/4}{x - 1} + \frac{3/4}{x + 3}$$

(koefficienterna A och B kan hittas t.ex. via handpåläggningsmetoden). Detta ger till sist (Steg 4 och insättningsformeln)

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_2^3 \frac{x}{x^2 + 2x - 3}\, dx = 2\pi \int_2^3 \left(\frac{1/4}{x - 1} + \frac{3/4}{x + 3} \right) dx = \\ &= 2\pi \left[\frac{1}{4} \ln|x - 1| + \frac{3}{4} \ln|x + 3| \right]_2^3 = \frac{\pi}{2} (4 \ln 2 + 3 \ln 3 - 3 \ln 5) \approx 0.62\pi. \end{aligned}$$

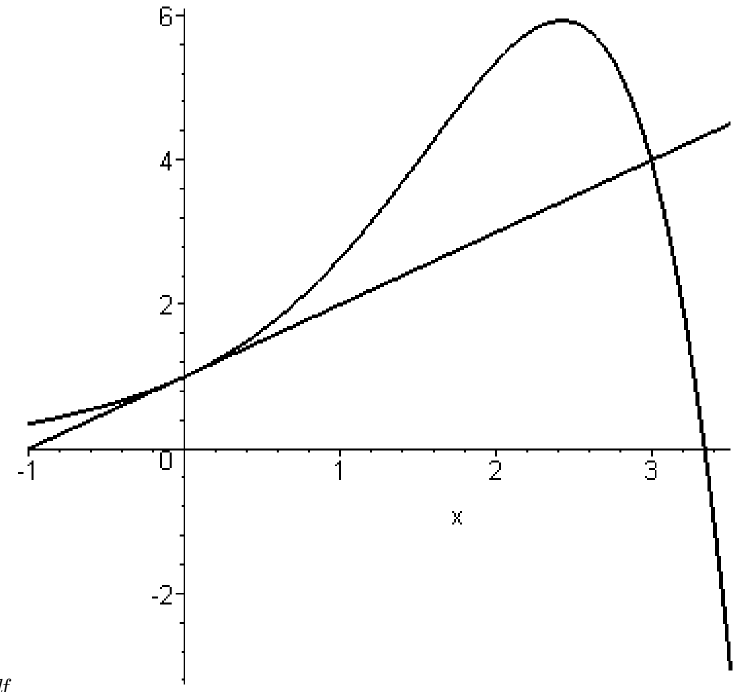
4. Den sökta arean ges av

$$A = 2\pi \int_1^2 y(x) \sqrt{1 + [y'(x)]^2} dx.$$

Men

$$y(x)\sqrt{1 + [y'(x)]^2} = \sqrt{x}\sqrt{1 + \frac{1}{4x}} = \sqrt{x + \frac{1}{4}}$$

2



$_2$.pdf

Figure 2: $y = x + 1$ tangerar $y = \frac{1}{2}e^x \sin x + \frac{1}{2}x + 1$ då $x = 0$.

så att

$$\begin{aligned} A &= 2\pi \int_1^2 \sqrt{x + \frac{1}{4}} dx = 2\pi \left[\frac{2}{3} \left(x + \frac{1}{4} \right)^{3/2} \right]_1^2 = \frac{4}{3}\pi \left(\left(\frac{9}{4} \right)^{3/2} - \left(\frac{5}{4} \right)^{3/2} \right) = \\ &= \frac{1}{6}\pi \left(27 - 5\sqrt{5} \right). \end{aligned}$$

5. a) Vi räknar direkt ur definitionen. Notera att integralen är generaliserad i $+\infty$:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\, dx = \int_1^{\infty} \frac{3}{x^3}\, dx = \lim_{b \to \infty} \int_1^{\infty} \frac{3}{x^3}\, dx = \lim_{b \to \infty} \left[-\frac{3}{2} x^{-2} \right]_1^{\infty} = \frac{3}{2}.$$

Variansen $V(X)$ kan man få ur sambandet $V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$ där

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\, dx = \int_1^{\infty} \frac{3}{x^2}\, dx = \lim_{b \to \infty} \int_1^{\infty} \frac{3}{x^2}\, dx = \lim_{b \to \infty} \left[-3x^{-1} \right]_1^{\infty} = 3.$$

Således,

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = 3 - \frac{9}{4} = \frac{3}{4}.$$

b) Medianen $x_{0.50}$ måste uppfylla sambandet

$$\int_{-\infty}^{x_{0.50}} f(t)\, dt = \frac{1}{2}$$

och eftersom $f = 0$ för $x < 1$ så måste $x_{0.50} > 1$. Vi har då

$$\int_1^{x_{0.50}} \frac{3}{t^4}\,dt = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \left[-t^{-3}\right]_1^{x_{0.50}} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 1 - (x_{0.50})^{-3} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x_{0.50} = \sqrt[3]{2}.$$

6. a) Se Sats 8.2, sid. 358 i boken.

   b) Vi börjar med i). Genom att använda sig av Sats 8.3 (elementära Maclaurinutvecklingar) får vi

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1 + \frac{1}{2}x^2}{x^3 \arctan x} &= \lim_{x\to 0} \frac{\left(1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + O(x^6)\right) - 1 + \frac{1}{2}x^2}{x^3(x + O(x^3))} = \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{24}x^4 + O(x^6)}{x^4 + O(x^6)} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{24} + O(x^2)}{1 + O(x^2)} = \frac{1}{24}
\end{aligned}$$

   För att uträkna ii) gör vi ett variabelbyte $t = x - 1$ i gränsvärdet. Vi får

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1} \frac{\ln x - x + 1}{(x-1)^2} &= \left[\begin{array}{c} t = x - 1,\ x = t + 1 \\ x \to 1 \Rightarrow t \to 0 \end{array}\right] = \lim_{t\to 0} \frac{\ln(1+t) - t}{t^2} = \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{t - \frac{1}{2}t^2 + O(t^3) - t}{t^2} = \lim_{t\to 0} \frac{-\frac{1}{2}t^2 + O(t^3)}{t^2} = \lim_{t\to 0}\left(-\frac{1}{2} + O(t)\right) = -\frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

7. a) Se Sats 6.5 i boken, sid. 288.

   b) Medelvärdessatsen för integraler tillämpad till integralen i uppgiften säger att det finns en punkt $t \in [1, 2]$ sådan att

$$\int_1^2 \frac{\sin x}{1 + x^5}\,dx = \frac{\sin t}{1 + t^5}(2 - 1) = \frac{\sin t}{1 + t^5}$$

   som på intervallet $[1, 2]$ är säkert $\leq \frac{1}{2}$ ty $\sin t \leq 1$ medan $\frac{1}{1+x^5} \leq \frac{1}{2}$ där.