Krzysztof Marciniak, ITN
Linköpings universitet
tfn 011-36 33 20
e-post: krzma@itn.liu.se

Lösningar till tentamen TEN1 i Envariabelanalys II (TNIU 23)

för BI

2011–06–07 kl. 08.00-13.00

1. Differentialekvationen

$$y' + \frac{y}{1+x} = x^n$$

är linjär av 1:a ordningen och kan därför lösas med hjälp av en integrerande faktor. Ett möjligt val av integrerande faktor $h(x)$ är

$$h(x) = e^{\int \frac{dx}{1+x}} = e^{\ln|1+x|} = |1+x| = \pm(1+x) = 1+x$$

(vi väljer + i näst sista uttrycket; att välja minustecknet ändrar inget; prova gärna). Efter ledvis multiplikation av ekvationen med h får vi

$$(1+x)y' + y = x^n(1+x)$$

eller

$$[(1+x)y]' = x^n + x^{n+1}$$

så att

$$(1+x)y = \int \left(x^n + x^{n+1}\right) dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + \frac{x^{n+2}}{n+2} + C.$$

Ekvationens allmänna lösning blir det då

$$y = \frac{\frac{x^{n+1}}{n+1} + \frac{x^{n+2}}{n+2} + C}{1+x}$$

och villkoret $y(0) = 1$ leder till att $C = 1$ så att den sökta lösningen är

$$y = \frac{\frac{x^{n+1}}{n+1} + \frac{x^{n+2}}{n+2} + 1}{1+x}$$

2. Den karakteristiska ekvationen $r^2 + 1 = 0$ har två rötter: $\pm i$ så att den allmänna lösningen av den homogena delen av ekvationen blir

$$y_h = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

Vi letar nu efter en partikulär lösning av hela ekvationen på formen $y_p = y_{p_1} + y_{p_2}$ där y_{p_1} löser $y'' + y = x$ medan y_{p_2} löser $y'' + y = \cos 2x$ (det är möjligt tack vare superpositionspincipen, se sid. 399 i boken). Man gissar lätt att y_{p_1} kan väljas som $y_{p_1} = x$ ($y''_{p_1} = 0$ då) medan y_{p_2} hittar man via ansatsen $y_{p_2} = A\cos 2x + B \sin 2x$; man får då $y_{p_2} = -\frac{1}{3}\cos(2x)$. Allt detta betyder att den allmänna lösningen för hela ekvationen är

$$y = y_h + y_p = C_1 \cos x + C_2 \sin x + x - \frac{1}{3}\cos(2x)$$

Det återstår att hitta de värden på konstanterna C_1 och C_2 som fångar upp den "rätta" lösningen dvs den lösning som tangerar x-axeln i $x = \pi$. Detta villkoret betyder att $y(\pi) = 0$ samt att $y'(\pi) = 0$. Vi får alltså

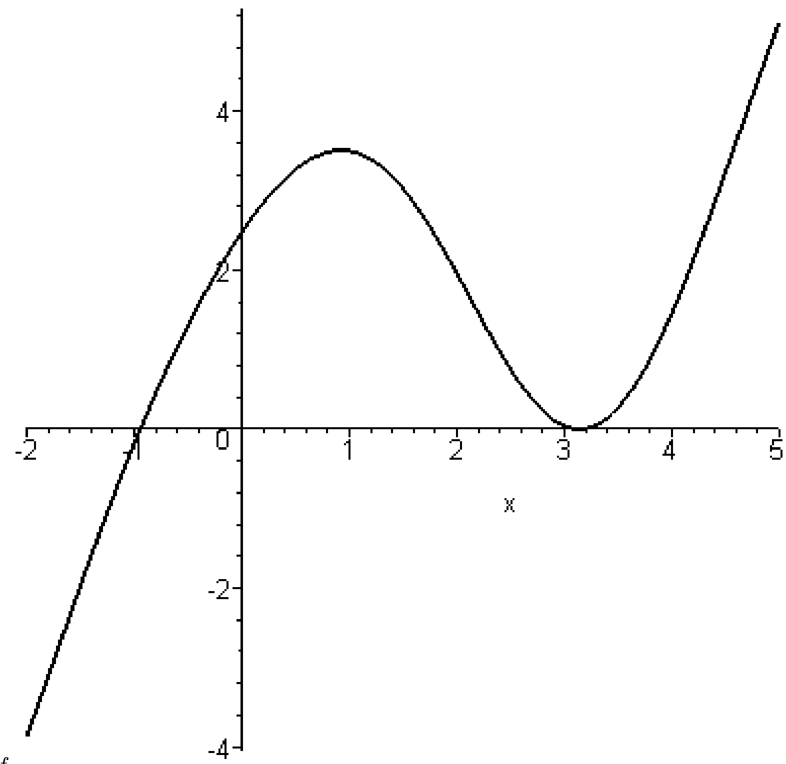
$$\begin{aligned} 0 &= y(\pi) = -C_1 + \pi - \frac{1}{3} \\ 0 &= y'(\pi) = -C_2 + 1 \end{aligned}$$

så att $C_1 = \pi - \frac{1}{3}$ medan $C_2 = 1$. Den sökta lösningen är alltså

$$y = \left(\pi - \frac{1}{3}\right)\cos x + \sin x + x - \frac{1}{3}\cos(2x)$$

Lösningen kas åskådas på Figure 1.

1



1.pdf

Figure 1: Lösningen $y = \left(\pi - \frac{1}{3}\right)\cos x + \sin x + x - \frac{1}{3}\cos(2x)$

3. Den sökta längden ges av följande integral

$$l = \int_1^6 \sqrt{1 + [y'(x)]^2}\, dx.$$

Eftersom $y'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{4}x$ får vi

$$1 + [y'(x)]^2 = 1 + \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{4}x\right)^2 = 1 + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4}x^2 = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}x^2 = \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{4}x\right)^2$$

så att till sist

$$l = \int_1^6 \sqrt{1 + [y'(x)]^2}\, dx = l = \int_1^6 \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{4}x\right)\, dx = \left[\ln|x| + \frac{x^2}{8}\right]_1^6 = \ln 6 + \frac{35}{8}.$$

4. Den sökta mantelarean ges av den genaraliserade integralen

$$A = 2\pi \int_0^\infty y(x)\sqrt{1 + [y'(x)]^2}\, dx = 2\pi \int_0^\infty e^{-x}\sqrt{1 + e^{-2x}}\, dx$$

Det enklaste sättet att visa att integralen ovan är ändlig (så att arean är ändlig) är genom att utnyttja att integranden är mindre än $\sqrt{2}e^{-x}$ för $x > 0$ ty:

$$e^{-x}\sqrt{1 + e^{-2x}} < e^{-x}\sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}e^{-x}$$

(därför att $e^{-2x} < 1$ för $x > 0$). Detta ger

$$\begin{aligned} A &= 2\pi \int_0^\infty e^{-x}\sqrt{1 + e^{-2x}}\, dx < 2\sqrt{2}\pi \int_0^\infty e^{-x}\, dx = 2\sqrt{2}\pi \lim_{b\to\infty} \int_0^b e^{-x}\, dx = \\ &= 2\sqrt{2}\pi \lim_{b\to\infty} \left[-e^{-x}\right]_0^b = 2\sqrt{2}\pi \lim_{b\to\infty} \left(-e^{-b} + 1\right) = 2\sqrt{2}\pi < \infty \end{aligned}$$

Inser man inte detta får man istället exakt uträkna integralen. Låt oss i sådant fall beräkna först en primitiv till integranden. Detta görs via ett variabelbyte:

$$\begin{aligned} \int e^{-x}\sqrt{1 + e^{-2x}}\, dx &= \left[\begin{array}{c} y = e^{-x} \\ dy = -e^{-x}dx \end{array}\right] = -\int \sqrt{1 + y^2}\, dy = \\ &= -\frac{y}{2}\sqrt{1 + y^2} - \frac{1}{2}\ln\left|y + \sqrt{y^2 + 1}\right| + C = \\ &= -\frac{e^{-x}}{2}\sqrt{1 + e^{-2x}} - \frac{1}{2}\ln\left|e^{-x} + \sqrt{e^{-2x} + 1}\right| + C. \end{aligned}$$

Uträkning av $\int \sqrt{1 + y^2}\, dy$ görs så här:

$$\begin{aligned} \int \sqrt{1 + y^2}\, dy &= \int \frac{1 + y^2}{\sqrt{1 + y^2}}\, dy = \int \frac{dy}{\sqrt{1 + y^2}} + \int y\frac{y}{\sqrt{1 + y^2}}\, dy = \\ &= \ln\left|y + \sqrt{1 + y^2}\right| + \int y\frac{y}{\sqrt{1 + y^2}}\, dy \end{aligned}$$

och sedan fortsätter man genom att partiellintegrera integralen på HL. Summa summarum, vi får att

$$\begin{aligned} A &= 2\pi \lim_{b\to\infty} \int_0^b e^{-x}\sqrt{1 + e^{-2x}}\, dx = 2\pi \lim_{b\to\infty} \left[-\frac{e^{-x}}{2}\sqrt{1 + e^{-2x}} - \frac{1}{2}\ln\left|e^{-x} + \sqrt{e^{-2x} + 1}\right|\right]_0^b = \\ &= \pi\left(\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2})\right) < \infty \end{aligned}$$

vilket också visar att uppskattningen i den första metoden var rätt bra.

5. a) Vi utgår från definitionen: $O(x^n) = x^n b(x)$ där b är en funktion begränsad nära $x = 0$. Således

$$O(x^m) \cdot O(x^n) = x^m b_1(x) x^n b_2(x) = x^{m+n} b_1(x) b_2(x)$$

där $b_1(x)$ och $b_2(x)$ är två funktioner som är begränsade nära origo vilket gör att även $b(x) = b_1(x)b_2(x)$ är begränsad nära origo, så att $HL = x^{m+n}b(x) = O(x^{m+n})$.

b) Vi utgår från de kända Maclaurinutvecklingar för e^x och $\ln(1+x)$. Vi får

$$\begin{aligned} e^{x^2}\ln(1-3x) &= \left(1 + x^2 + O(x^4)\right)\left(-3x - \frac{(-3x)^2}{2} + \frac{(-3x)^3}{3} + O(x^4)\right) = \\ &= -3x - \frac{(-3x)^2}{2} + \frac{(-3x)^3}{3} + O(x^4) + \\ &\quad -3x^3 + O(x^4) \\ &\quad +O(x^5) \\ &= -3x - \frac{9}{2}x^2 - 12x^3 + O(x^4). \end{aligned}$$

Läs om ordokalkyl i boken (sid. 366-368) om du inte förstår uträkningen ovan. Kom ihåg att ordotermer är "skräptermer" i vilka vi kastar in allt vi inte behöver.

6. Betrakta funktionen

$$f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, \quad f(x) = \frac{1}{\pi(x^2+1)}$$

a) Funktionen är naturligtvis ≥ 0 (den är tom > 0). Vi måste visa att $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$. Eftersom funktionen är jämn är det då samma sak som att visa att $\int_0^{\infty} f(x)dx = \frac{1}{2}$. Vi har dock

$$\int_0^{\infty} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\lim_{b\to\infty}\int_0^b \frac{dx}{x^2+1} = \frac{1}{\pi}\lim_{b\to\infty}\left[\arctan x\right]_0^b = \frac{1}{\pi}\lim_{b\to\infty}(\arctan b - \arctan 0) = \frac{1}{2}, \text{ v.s.v.}$$

b) Den nedre kvartilen $x_{0.25}$ måste upfylla sambandet

$$\int_{-\infty}^{x_{0.25}} f(t)dt = \frac{1}{4}$$

Men

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{x_{0.25}} f(t)dt &= \lim_{a\to-\infty}\int_a^{x_{0.25}} f(t)dt = \frac{1}{\pi}\lim_{a\to-\infty}\int_a^{x_{0.25}}\frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{\pi}\lim_{a\to-\infty}\left[\arctan t\right]_a^{x_{0.25}} = \\ &= \frac{1}{\pi}\lim_{a\to-\infty}(\arctan x_{0.25} - \arctan a) = \frac{1}{\pi}\left(\arctan x_{0.25} + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\arctan x_{0.25}}{\pi} + \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Det betyder att $x_{0.25}$ måste upfylla sambandet

$$\frac{\arctan x_{0.25}}{\pi} + \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

dvs

$$\arctan x_{0.25} = -\frac{\pi}{4}$$

så att $x_{0.25} = \tan(-\pi/4) = -\tan(\pi/4) = -1$.

7. a) Se Sats 6.7, sid. 290 i boken.

b) Deriverar vi ekvationen ledvis med hläp av analysens huvudsats får vi $y'(x) = y^2(x)$ eller $\frac{dy}{dx} = y^2$ vilket är en separabel ekvation. Vii separerar variabler och får

$$\frac{dy}{y^2} = dx$$

Ledvis integration ger den allmänna lösningen i implicit form

$$-\frac{1}{y} = x + C$$

som kan lösas ut m.a.p. y till den explicita formen:

$$y = \frac{-1}{x + C}$$

Vidare, ur sambandet

$$y(x) = 1 + \int_2^x y^2(t)dt$$

får vi att

$$y(2) = 1 + \int_2^2 y^2(t)dt = 1$$

Sätter vi in villkoret $y(2) = 1$ i lösningen ovan får vi $1 = \frac{-1}{2+C}$ ur vilket följer att $C = -3$. Således, den sökta lösningen är

$$y = \frac{-1}{x-3} = \frac{1}{3-x}$$

(där $x < 3$).