Krzysztof Marciniak, ITN
Linköpings universitet
tfn 011-36 33 20
e-post: krzma@itn.liu.se

Lösningar till tentamen TEN1 i Envariabelanalys II (TNIU 23)
för BI
2011–08–20 kl. 08.00-13.00

1. a) Se boken, sid. 391.

b) Ekvationen är separabel. För att se detta delar vi ekvationen ledvis med x^2 och får

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x}$$

så att vi kan lätt separera variabler i ekvationen:

$$dy = \frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x} dx$$

Ledvis integrering ger

$$\int dy = \int \frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x} \, dx$$

och integralen på högerledet kan vi lösa genom variabelbytet $t = \frac{1}{x}$. Vi får

$$y = \int \frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x} \, dx = \left[t = \frac{1}{x} \Rightarrow dt = -\frac{1}{x^2} dx \right] = - \int \sin t \, dt = \cos t + C = \cos \frac{1}{x} + C$$

vilket är den sökta lösningen.

2. a) Den allmänna lösningen av differentialekvationen

$$y'' + 4y = \sin x - 2 \cos x$$

har som vi vet formen $y = y_h + y_p$. Vi letar först efter y_h. Den karakteristiska ekvationen $r^2 + 4 = 0$ har två komplexkonjugerade rötter $\pm 2i$ varför

$$y_h = C_1 \cos(2x) + C_2 \sin(2x).$$

En partikulär lösning y_p kan hittas via ansatzen $y_p = A \sin x + B \cos x$. Vi har då att $y_p' = A \cos x - B \sin x$ och $y_p'' = -A \sin x - B \cos x$. Sätter vi in detta i ekvationen får vi

$$-A \sin x - B \cos x + 4A \sin x + 4B \cos x = \sin x - 2 \cos x$$

eller

$$3A \sin x + 3B \cos x = \sin x - 2 \cos x$$

som ger $A = \frac{1}{3}$ och $B = -\frac{2}{3}$. Således, den allmänna lösningen av vår ekvation är

$$y = y_h + y_p = C_1 \cos(2x) + C_2 \sin(2x) + \frac{1}{3} \sin x - \frac{2}{3} \cos x.$$

b) Om en lösning $y(x)$ skall innehålla punkten $(\frac{\pi}{2}, \frac{1}{3})$ måste vi ha $y(\frac{\pi}{2}) = \frac{1}{3}$ eller

$$\frac{1}{3} = C_1 \cos \pi + C_2 \sin \pi + \frac{1}{3} \sin \frac{\pi}{2} - \frac{2}{3} \cos \frac{\pi}{2}$$

vilket ger $C_1 = 0$ medan C_2 får vara godtyckligt. Således, de sökta lösningarna har formen

$$y = y_h + y_p = C_2 \sin(2x) + \frac{1}{3} \sin x - \frac{2}{3} \cos x.$$

där C_2 är alltså en godtycklig konstant.

3. a) Se Sats 8.2 sid. 358.

   b) Vi räknar direkt med utnyttjande av de kända utvecklingar av funktionerna sin och cos (se Sats 8.3 sid. 365 i boken).

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin x - x\cos x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + O(x^7) - x\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + O(x^6)\right) = \\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\right)x^3 + \left(\frac{1}{5!} - \frac{1}{4!}\right)x^5 + O(x^7) - xO(x^6) = \\ &= \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{30}x^5 + O(x^7). \end{aligned}$$

   Räknar man lite fler termer kan man se att

$$f(x) = 2\left(\frac{x^3}{3!} - \frac{2x^5}{5!} + \frac{3x^7}{7!} - ... + (-1)^{n-1}\frac{nx^{2n+1}}{(2n+1)!} + O(x^{2n+3})\right)$$

   men det behövde man inte göra på tentan.

4. Den sökta arean ges av formeln på sid. 319:

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2}\int_{-\pi/4}^{\pi/4} h^2(\varphi)\,d\varphi = \frac{1}{2}a^2\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\cos(2\varphi)\,d\varphi = \frac{1}{2}a^2\left[\frac{1}{2}\sin(2\varphi)\right]_{-\pi/4}^{\pi/4} = \\ &= \frac{1}{4}a^2(\sin(\pi/2) - \sin(-\pi/2)) = \frac{1}{2}a^2. \end{aligned}$$

5. Den sökta längden ges av formeln på sid. 323 i boken:

$$\begin{aligned} l &= \int_0^{\sqrt{3}}\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\,dt = \int_0^{\sqrt{3}}\sqrt{4t^2 + [1-t^2]^2}\,dt = \int_0^{\sqrt{3}}\sqrt{4t^2 + 1 - 2t^2 + t^4}\,dt = \\ &= \int_0^{\sqrt{3}}\sqrt{1 + 2t^2 + t^4}\,dt = \int_0^{\sqrt{3}}\sqrt{(1+t^2)^2}\,dt = \int_0^{\sqrt{3}}(1+t^2)dt = \left[t + \frac{t^3}{3}\right]_0^{\sqrt{3}} = \sqrt{3} + \frac{3\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}. \end{aligned}$$

6. a) För att vara en täthetsfunktion, funktionen f måste uppfylla bägge villkor i Definition 1, Fö 8. Det första kravet ($f \geq 0$) är uppfyllt. Vi måste även kontrollera det andra kravet:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \frac{3}{4}\int_{-1}^{1}(1-x^2)\,dx = \frac{3}{4}\left[x - \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \frac{3}{4}\left(1 - \frac{1}{3} - \left(-1 - \frac{-1}{3}\right)\right) = \frac{3}{4}\cdot\frac{4}{3} = 1$$

   så att även detta krav är uppfyllt.

   b) Enligt Definition 5, Fö 8:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$$

   så att för alla $x < -1$ är $F(x) = 0$ medan för alla $x > 1$ är $F(x) = 1$. Till sist, för $x \in [-1, 1]$

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = F(x) = \frac{3}{4}\int_{-1}^{x}(1-t^2)\,dt = \frac{3}{4}\left[t - \frac{t^3}{3}\right]_{-1}^{x} = \frac{3}{4}\left(x - \frac{x^3}{3} + 1 - \frac{1}{3}\right) = \\ &= \frac{3}{4}x - \frac{1}{4}x^3 + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Vi får alltså

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{för } x < -1 \\ \frac{3}{4}x - \frac{1}{4}x^3 + \frac{1}{2} & \text{för } x \in [-1, 1] \\ 1 & \text{för } x > 1 \end{cases}$$

c)

$$P(-\frac{1}{2} \leq X \leq \frac{1}{2}) = \int_{-1/2}^{1/2} f(t)\,dt = F(1/2) - F(-1/2) = \frac{27}{32} - \frac{5}{32} = \frac{11}{16}.$$

7. a) Se Sats 6.7, sid. 290.

   b) Se sid. 291 i boken.